FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXIII

Palchetto 9

Num.° d' ordine 43

10368

18-C-45

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

2558

NAPOLI

B. Prov
I
2558

608785

ELEMENTI
DELL'
ALGEBRA

OFFICIO TOPOGRAFICO

PARTE PRIMA

DELLE REGOLE PER CALCOLARE LE QUANTITÀ ALGEBRAICHE.

1. L'Algebra ha per oggetto le regole per calcolare le quantità in una maniera generale, i metodi per risolverne i problemi, e gl'indirizzi per iscoprire le proprietà, e le convenienze delle grandezze.

2. Gli Algebristi si servono delle lettere dell'alfabeto per rappresentare indistintamente la quantità continua, e la discreta, ed usano alcuni segni per indicarne la somma, la sottrazione, il prodotto, il quoziente, la radice ec.

3. Questo segno + significa più, e indica la somma; quindi è, che $a + b$ rappresenta la quantità a unita alla quantità b.

Il segno — significa meno, e indica la sottrazione; dimodochè $a - d$ rappresenta, che la quantità d è sottratta dalla quantità a.

Il ſegno X indica la moltiplicazione; ſicchè $a \times b$ rappreſenta la quantità a moltiplicata per la quantità b.

Se poi ſopra il ſegno — ſi ſcrive una qualche quantità, ed un'altra ſotto di eſſo, come ſarebbe $\frac{a}{b}$, tal eſpreſſione indica, che la quantità a è diviſa per la quantità b.

Il ſegno = ſerve per indicare l'uguaglianza fra due quantità; e però $m = n$ ſignifica, che la quantità m è uguale alla quantità n; $a + d = c - k$ vuol dire, che la ſomma $a + d$ è uguale alla quantità c meno la quantità k.

L'uguaglianza di due quantità eſpreſſa con il ſegno = chiamaſi *Equazione*; così $9 = 4 + 5$ ſarà un'equazione, in cui la quantità, che, come il 9, ſi trova alla ſiniſtra, diceſi primo membro, e quella quantità, che, come $4 + 5$, ſi trova alla dritta, chiamaſi ſecondo membro dell'equazione.

Il ſegno $>$ indica, che la quantità ſcritta verſo l'apertura dell'angolo è maggiore dell'altra, che trovaſi avanti la cima, e così $a > b$ indica, che la quantità a è maggiore della quantità b; l'eſpreſſione $c < d$ rappreſenta, che la quantità c è minore dell'altra d; l'eſpreſſione $c : g :: k : m$

indica una proporzione, in cui c ſtà al g come k ad m.

4. Le quantità algebraiche ſono ſemplici, o compoſte, poſitive, o negative. Le quantità ſemplici s'eſprimono con una, con due, o più lettere, ſenzachè vi ſia frappoſto il ſegno $+$, o il ſegno $-$; laonde a, o pure b è una quantità ſemplice, e così ancora ſono quantità ſemplici $a\,b\,c$, $d\,b\,c\,a$, ec.

Le quantità compoſte s'eſprimono con due, o più lettere, fra le quali ſi trova il ſegno $+$, o il ſegno $-$; come $a+b$, $a+b-c\,d$.

La quantità $a+b$ ſi dice di due termini, $a+b-c\,d$ ſi dice di tre termini, e così ſi dirà compoſta di quattro termini la quantità $a+b+c+d$ ec.

5. Delle quantità altre ſono poſitive, cioè maggiori del nulla, altre negative, o minori del nulla. Le poſitive ſono quelle, che hanno il ſegno $+$, come $+a+b$, o dicaſi $a+b$, ſtantechè qualſivoglia lettera, la quale, eſſendo ſcritta ſola, o a ſiniſtra di una qualche altra quantità, dee avere il ſegno $+$, tal ſegno ſi ſuole tralaſciare. Le quantità negative ſono quelle, che a ſiniſtra ſono precedute dal ſegno $-$, come $-c$, $-a-d-f$.

Per intendere la ragione, per cui le quantità positive si chiamano maggiori del nulla, e le quantità negative minori del nulla, si consideri che, se s'aggiugne il zero ad una qualche quantità, questo non l'accresce, nè la diminuisce; per la qual cosa la quantità positiva potrà chiamarsi maggiore del zero, giacchè, essendo aggiunta ad un'altra quantità, l'accresce, ed all'opposito potrà dirsi minore del zero la quantità negativa, giacchè, se si unisce ad un'altra quantità, la diminuisce.

Per concepire facilmente la natura delle quantità negative, si rifletta, che i crediti si possono considerate per quantità positive, avvegnachè accrescono il peculio, ed i debiti si possono pigliare per quantità negative, stantechè lo diminuiscono. E però, se taluno fosse in uno stato tale, che non avesse altro, se non se un credito di 1000 scudi, ed un debito di 600, si direbbe, che quello ha scudi 1000 — 600, cioè 400 scudi, ed all'opposito, se avesse un credito di 700 scudi, ed un debito di 900, si direbbe, che ha — 200 scudi, cioè che dopo d'avere col suo credito scontato una parte del suo debito, dovrebbe ancora colla sua industria cercare di guadagnarsi 200 scudi per terminare di pa-

gare il debito, per quindi eſſere ſenza crediti, e ſenza debiti.

CAPO I.

Del modo di calcolare le quantità ſemplici, e primieramente del Sommare.

6. Due, o più quantità ſemplici ſi ſommano collo ſcrivere l' una dopo l' altra, laſciando a ciaſcuna il ſuo riſpettivo ſegno; ſicchè per ſommare $+ a$ con $+ b$ ſi ſcriverà $a + b$, così ancora per ſommare a con $+ b$ con $- c$ ſi ſcriverà $a + b - c$.

Occorrendo poi, che fra le quantità propoſte a ſommarſi ſe ne trovino due, o più eſpreſſe colle medeſime lettere, e che abbiano lo ſteſſo ſegno, in tale caſo ſi ſcriverà una ſola volta la medeſima lettera, prefiggendo però ad eſſa un numero, che indichi quante volte queſta quantità deve eſſere poſta. Per eſempio per ſommare a con a con b, in vece di ſcrivere $+ a + a + b$, ſi ſcriverà $2 a + b$. Parimente ſe ſia propoſto a ſommarſi $a c$ con $a c$ con $d b$ con $d b$, la ſomma ſarà $2 a c + 2 d b$. Queſto modo di operare per eſprimere più in breve la ſomma ſi chiama *correggere l' eſpreſſione*, o pure *fare la riduzione*.

7. I numeri, che ſono preſiſſi a ſiniſtra delle lettere, ſi chiamano *coefficienti*, e quelle quantità, che non hanno verun numero preſiſſo, ſi devono conſiderare come ſe aveſſero l' unità per coefficiente.

8. Qualora fra le quantità da ſommarſi alcune eſpreſſe colle medeſime lettere avranno il ſegno +, ed altre il ſegno —, in ſimil caſo ſi ſommeranno i coefficienti di quelle, che hanno il ſegno +, e a parte ſi ſommeranno altresì i coefficienti di quelle, che hanno il ſegno —, indi ſi leverà la ſomma minore dalla maggiore, e il rimanente ſarà il coefficiente da preſiggerſi alla medeſima quantità, per avere la ſomma delle quantità propoſte. A queſta ſomma ſi preſiggerà poi il ſegno delle quantità, i cui coefficienti hanno data la ſomma maggiore; ſicchè per ſommare + 4 *a*, + 5 *a*, — 2 *a*, — *a*, ſi ſommeranno li coefficienti 4, e 5 delle quantità poſitive, e ſi avrà 9; dappoi ſi ſommeranno li coefficienti 2, ed 1 delle quantità negative, e ſi avrà 3; laonde levando la ſomma minore 3 dalla maggiore 9, il rimanente 6 ſarà il coefficiente da preſiggerſi alla lettera *a*, e s' avrà 6 *a*, che ſarà la ſomma delle quantità propoſte, e dovrà tale ſomma eſſere poſitiva, perchè la quantità 4 *a*, + 5 *a*, che hanno dato

la ſomma maggiore 9 dei coefficienti, hanno il ſegno +. Se poi ſi doveſſero ſommare le quantità — 4 *a*, — 5 *a*, + 2 *a*, + *a*, operando come quì avanti, la loro ſomma ſarà — 6 *a*. Operando nella ſteſſa maniera ſi troverà, che la ſomma 5 *c* — 3 *c* — 2 *c* ſarà zero; poichè, fatta la dovuta ſottrazione dei coefficienti, eſſi s' annullano.

Sottrarre le quantità ſemplici.

9. Per ſottrarre una quantità da un' altra ſi deve mutare il ſegno a quella, che ſi deve ſottrarre, indi ſcriverla preſſo l' altra col ſegno mutato. Per eſempio ſe ſi vuole ſottrarre *a* da *b*, ſi ſcriverà *b* — *a* per l' avanzo; ſe ſi dovrà ſottrarre — *b* da + *a*, s' avrà *a* + *b* per l' avanzo: imperciocchè, ſiccome il ſottrarre una quantità da un' altra è lo ſteſſo, che pigliare la differenza fra eſſe quantità, o dicaſi trovare quanto ſi debba aggiugnere alla quantità da ſottrarſi, acciocchè la ſomma ſia uguale alla quantità, da cui ſi deve far la ſottrazione; così aggiugnendo + *a*, + *b* alla quantità da ſottrarſi — *b*, la ſomma ſarà — *b* + *a* + *b*, la quale ſi riduce ad *a*, che è la quantità, da cui ſi deve fare la ſottrazione. Nella medeſima maniera ſi proverà, che ſottraendo *b*

dalla quantità $-a$ s' avrà di reſiduo $-a-b$, e ſottrando $-b$ da $-a$, s' avrà $-a+b$.

Moltiplicare le quantità ſemplici.

10. Si moltiplicano fra loro le quantità ſemplici ſcrivendo l'una dopo l'altra ſenza verun ſegno frappoſto; e così nel moltiplicare a per b ſi ſcriverà ab pel prodotto, per moltiplicare da per bc ſi ſcriverà $dabc$ pel prodotto, o ſia $abcd$, eſſendo ſempre lo ſteſſo, comunque eſſe lettere vengano collocate.

Riſpetto poi ai ſegni ſi dee oſſervare, che, ſe ambedue le quantità da moltiplicarſi hanno il ſegno $+$, od ammendue il ſegno $-$, al prodotto ſi prefiggerà ſempre il ſegno $+$; ma, ſe l'una ha il ſegno $+$, e l'altra il ſegno $-$, al prodotto ſi dovrà prefiggere il ſegno $-$. Per conoſcere il fondamento di queſta regola, convien riflettere che, qualora ſi afferma il poſitivo, la conſeguenza è ſempre poſitiva, e che dee pure eſſere poſitiva la conſeguenza, ognorachè ſi nega il negativo; e per contrario dovrà ſempre eſſere negativa la conſeguenza, ſia che ſi neghi il poſitivo, o che ſi affermi il negativo. Ora, ſiccome il moltiplicare è pigliare una quantità tante volte,

quante unità ſono nell' altra; così colla moltiplicazione ſi viene ad affermare, o a negare tante volte il valore poſitivo, o negativo del numero da moltiplicarſi, quante ſono le unità nel moltiplicatore.

11. Allorchè le quantità da moltiplicarſi hanno dei coefficienti numerici, queſti ſi dovranno moltiplicare fra loro, come ſi è inſegnato nell' Aritmetica, ed il prodotto di queſti ſarà il coefficiente da prefiggerſi ai prodotti letterali; così, dovendoſi moltiplicare $4\,a\,b$ per $2\,c$, il prodotto ſarà $8\,a\,b\,c$, il prodotto di $7\,c\,f$ per $5\,d\,m$ ſarà $35\,c\,f\,d\,m$, il prodotto di $4\,c\,d$ per $-3\,f$ ſarà $-12\,c\,d\,f$, il prodotto di $-6\,m\,n$ per $5\,a\,d$ ſarà $-30\,a\,d\,m\,n$, il prodotto di $-7\,f$ per $-3\,k$ ſarà $21\,f\,k$.

Dividere le quantità ſemplici.

12. La Diviſione riſolve ciò, che compone la moltiplicazione; laonde, ſiccome $a\,b$ è il prodotto di a per b, così, dividendo $a\,b$ per a, s' avrà il quoziente b; e però, ſe nel dividendo ſi trova la medeſima lettera, o le medeſime lettere, che ſono nel diviſore, baſterà cancellare dal dividendo il diviſore: per eſempio dividendo $a\,b\,c$ per a, il quoziente ſarà $b\,c$, dividendo $b\,c\,d$ per $b\,c$, il quoziente ſarà d.

Se poi il diviſore, e il dividendo aveſſero dei coefficienti numerici, in tale caſo ſi dividerà altresì il coefficiente del dividendo pel coefficiente del diviſore ſecondo le regole dell'Aritmetica, e il quoziente numerico ſi prefiggerà al quoziente letterale. Se ſi dee dividere $20\,c\,d$ per $5\,c$, il quoziente ſarà $4\,d$; ſe poi il dividendo, e il diviſore foſſero eſpreſſi colle medeſime lettere, ed aveſſero altresì lo ſteſſo coefficiente, come ſarebbe dividere $2\,a\,b$ per $2\,a\,b$, il quoziente ſarà l'unità, perchè qualſivoglia quantità contiene una volta ſe medeſima; ma ſe ſolamente alcune lettere del diviſore ſaranno comuni con quelle del dividendo, allora ſi cancelleranno nel diviſore, e nel dividendo quelle lettere, che ſono comuni, e le rimanenti del dividendo ſi ſcriveranno ſopra una lineetta, e ſotto la ſteſſa linea ſi ſcriveranno le rimanenti del diviſore; per eſempio il quoziente, che ſi ricava dividendo $a\,b\,c$ per $b\,d$, ſarà $\frac{a\,c}{d}$.

Occorrendo poi, che il dividendo, e il diviſore abbiano dei coefficienti, e che il minore miſuri eſattamente il maggiore, ſe ne farà la diviſione, come nell'Aritmetica; dividendo $45\,c\,d\,f$ per $9\,a\,d$, il quo-

ziente ſarà $\frac{5cf}{a}$. Finalmente, ſe il diviſore, e il dividendo non avranno quantità comuni, allora ſi ſcriveranno in forma di frazione, ponendo il dividendo per numeratore, e il diviſore per denominatore. Volendo dividere a per b, s' indicherà il quoziente collo ſcrivere $\frac{a}{b}$; la medeſima coſa ſi praticherà riſpetto ai coefficienti, i quali non hanno altra miſura comune, fuorchè l'unità. Se ſi dovrà dividere $7cd$ per $3m$, ſi ſcriverà $\frac{7cd}{3m}$ pel quoziente.

13. La regola data nella moltiplicazione per li ſegni ſerve preciſamente per la diviſione. Allorchè il dividendo, e il diviſore hanno ammendue il ſegno $+$, o ammendue il ſegno $-$, ſi dovrà ſempre applicare al quoziente il ſegno $+$; e ſe l'uno avrà il ſegno $+$, e l'altro il ſegno $-$, in tal caſo ſi prefiggerà ſempre il ſegno $-$ al quoziente. Nel dividere $28cdf$ per $-7cd$, s'avrà di quoziente $-4f$; nel dividere $-36acm$ per $18ad$, s'avrà di quoziente $-\frac{2cm}{d}$. Nel dividere $-48afk$ per $-16ak$, s'avrà $3f$ di quoziente.

Delle Poteſtà delle quantità ſemplici.

14. Il prodotto, che ſi fa da una quantità moltiplicata una, o più volte in ſe ſteſſa, chiamaſi generalmenre *Poteſtà*, ovvero *grado*, ed in iſpecie $a\,a$, che è il prodotto della quantità a moltiplicata una volta in ſe ſteſſa, diceſi *ſeconda poteſtà*, cioè il quadrato di a, e moltiplicandoſi $a\,a$ per a, il prodotto $a\,a\,a$ è la *terza poteſtà*, o dicaſi il cubo di a, e così ſeguitando ſarà $a\,a\,a\,a$ la *quarta poteſtà*, cioè il quadrato quadrato di a, ed $a\,a\,a\,a\,a$ la *quinta poteſtà* di a ec.

Per non replicare più volte la medeſima lettera ſi ſuole ſcrivere a^2 in vece di $a\,a$, a^3 in vece di $a\,a\,a$, e così a^4 in luogo di $a\,a\,a\,a$, e così proſeguendo collo ſcrivere alla dritta della lettera un numero alquanto più in alto, il quale contenga tante unità, quante volte dovrebbe eſſere replicata la medeſima lettera. Queſto numero ſi chiama l'*Eſponente*, o l'*Indice* della poteſtà. Si dee quì oſſervare, che quelle quantità, le quali non hanno verun eſponente, ſi debbono conſiderare, come ſe aveſſero l'unità; così a è lo ſteſſo, che a^1, e diceſi prima poteſtà; lo ſteſſo ſi dovrà

dire di tutte le altre quantità, che non hanno alcun eſponente.

15. La quantità a ſarà la radice di tutte le diviſate poteſtà (§. 14.), cioè ſarà la radice quadrata della ſeconda poteſtà, o del quadrato $a\,a$, ſarà la radice cubica, o pure la terza radice della terza poteſtà a^3, la quarta radice della quarta poteſtà a^4 ec.

Si dee quì notare, che, ſiccome la medeſima poteſtà ſi può riferire a diverſe quantità, così può altresì avere diverſe denominazioni. La quantità a^8 ſi dirà poteſtà ottava, ſe ſi riferiſce ad a; quarta poteſtà, ſe ſi riferiſce ad a^2, ſeconda poteſtà, ſe ſi riferiſce ad a^4.

16. Importa ſommamente avvertire di non confondere li coefficienti cogli eſponenti delle quantità: imperciocchè, ſe s'abbia $3\,b$, ſarà lo ſteſſo, che $b + b + b$, e quindi ſe $b = 8$, ſarà $3\,b = 8 + 8 + 8 = 24$: ma b^3 eſſendo lo ſteſſo, che $b \times b \times b$, ſe $b = 8$, ſarà $b^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$.

Dell' Eſtrazione delle radici dalle quantità ſemplici.

17. Eſtrarre la radice è trovare una quantità, che moltiplicata una, o più volte in ſe ſteſſa produca la quantità propoſta; ſi

ſcorge adunque, che la radice quadrata di $a\,a\,b\,b$ ella è $a\,b$, giacchè $a\,b$ moltiplicato una volta in ſe ſteſſo produce la quantità $a\,a\,b\,b$, così la radice cubica di $a^3\,b^3$ ella è $a\,b$, perchè $a\,b$ moltiplicato due volte in ſe ſteſſo produce $a^3\,b^3$, e perchè $-a\,b$ moltiplicato una volta in ſe ſteſſo produce altresì $+a^2\,b^2$, conſegue, che la radice quadrata di $a^2\,b^2$ potrà eſſere tanto $+a\,b$, quanto $-a\,b$. Per la ſteſſa ragione tutte le poteſtà poſitive, gli eſponenti delle quali ſono numeri pari, avranno la radice denominata dall' eſponente, la quale potrà eſſere poſitiva, e negativa.

Non ſuccede però lo ſteſſo circa le poteſtà, che hanno i loro eſponenti diſpari; imperciocchè $a^3\,b^3$ è bensì il cubo di $a\,b$, ma non può eſſerlo di $-a\,b$, perchè $-a\,b$ moltiplicato due volte in ſe ſteſſo produce $-a^3\,b^3$.

18. Allorchè dalla quantità propoſta non ſi può eſtrarre la radice, che ſi ricerca, ſi ſcrive a ſiniſtra della quantità propoſta queſto ſegno $\surd$, il quale ſi chiama *Segna radicale*, ſopra cui ſi ſcrive il numero, che indica la radice, che ſi vuole eſtrarre dalla quantità propoſta, e così per indicare la radice quadrata di a, ſi ſcriverà

$\sqrt[3]{a}$, per rappreſentare la radice cubica di $a\,b$ ſi ſcriverà $\sqrt[3]{a\,b}$, per denotare la radice quarta di $a^2\,b^3$ ſi ſcriverà $\sqrt[4]{a^2b^3}$, per rappreſentare la radice cubica di $-c^2\,m^2$ ſi ſcriverà $\sqrt[3]{-c^2m^2}$. Quando però ſi tratta di cavare la radice quadrata, ſi ſuole intralaſciare il numero ſopra il ſegno radicale, e così per indicare la radice quadrata di a, baſterà ſcrivere $\sqrt{a}$.

Importa quì l'oſſervare, che la radice quadrata di $-bb$ non ſi può eſprimere, che per $\sqrt{-bb}$, avvegnachè, eſſendo bb un quadrato negativo, non ſi comprende come poſſa eſſere prodotto, non potendoſi dire, che la radice di $-bb$ ſia $-b$, poichè moltiplicandoſi $-b$ in ſe ſteſſo ſecondo le regole della moltiplica, produce $+bb$, e non già $-bb$; nè tampoco può dirſi, che la radice di $-bb$ ſia $+b$, poichè moltiplicandoſi $+b$ in ſe ſteſſo produce altresì $+bb$. Per la ſteſſa ragione la radice quarta di $-b^4$, e quella di $-b^8$ non ſi potranno eſprimere, che per $\sqrt[4]{-b^4}$, e $\sqrt[8]{-b^8}$. Lo ſteſſo ſi dirà di tutte le altre radici di eſponenti pari, che ſi debbono cavare da quantità nega-

tive; ma ſe le radici da cavarſi ſaranno d' eſponente impari, come ſe ſi doveſſe eſtrarre la radice cubica di $-b^3$, tale radice ſi potrà eſprimere per $-b$, come pure la radice quinta di $-b^5$ ſi potrà eſprimere altresì per $-b$. Queſte conſeguenze hanno dato motivo di diſtinguere le quantità in *Reali*, cioè realmente eſiſtenti, come ſono a, $\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{-b}$, ed in quantità *Immaginarie*, cioè che ſi poſſono ſolamente immaginare, come $\sqrt{-bb}$, $\sqrt[4]{-b^4}$, $\sqrt[3]{-b}$ ec.

19. Giacchè per innalzare una frazione a qualſivoglia poteſtà, egli è d' uopo innalzare tanto il numeratore, quanto il denominatore alla poteſtà propoſta, così per eſtrarre qualunque radice da una frazione, ſi dovrà eſtrarre la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore; la radice del numeratore ſarà il numeratore, e la radice del denominatore ſarà il denominatore della radice ricercata; così la radice quadrata di $\frac{aa}{bb}$ ſarà $\frac{a}{b}$, la radice cubica di $\frac{a^3b^3}{c^3}$ ſarà $\frac{ab}{c}$, ma la radice quadrata di $\frac{a}{b^2}$ ſarà $\frac{\sqrt{a}}{b}$, ovvero $\sqrt{\frac{a}{b^2}}$, perchè

chè dal numeratore non ſe ne può eſtrarre la radice. La radice cubica di $\frac{a^2}{b^2}$ ſarà $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$, o dicaſi $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, perchè non ſi può eſtrarre la radice nè dal numeratore, nè dal denominatore.

Se nelle frazioni s' incontreranno dei coefficienti, ſe ne eſtrarrà la radice a tenore delle regole date per le frazioni numeriche; e però la radice quadrata di $\frac{25\,c^2\,d^2}{9\,f^2}$ ſarà $\frac{5\,c\,d}{3\,f}$, la radice cubica di $\frac{343\,a^3d^3}{8\,m^3}$ ſarà $\frac{7\,a\,d}{2\,m}$; ma la radice quadrata di $\frac{12\,a\,c}{5\,d}$ ſarà $\sqrt{\frac{12\,a\,c}{5\,d}}$, ſtantechè non ſi può eſtrarre nè dai numeri, nè dalle lettere.

Del calcolo delle poteſtà ſemplici.

20. Il modo d'eſprimere colle cifre qualunque poteſtà di una quantità ſemplice ſomminiſtra un mezzo facile per moltiplicare, e dividere le poteſtà, per innalzarle a qualſivoglia grado, e per eſtrarne qualunque radice, valendoſi perciò degli eſponenti di eſſe.

Abbianſi per eſempio le poteſtà della quantità a, le quali ſono a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, ec. a^n (ponendoſi a^n per la quantità a innalzata alla poteſtà infinita). Volendo moltiplicare una di queſte poteſtà per un' altra, ſi ſommerà l' eſponente dell' una coll' eſponente dell' altra, e la ſomma ſarà l' eſponente del prodotto. Sicchè per moltiplicare a^2 per a^4 ſi ſommerà l' eſponente 2 coll' eſponente 4, la ſomma 6 ſarà l' eſponente del prodotto, dimodochè tale prodotto ſarà a^6. Imperciocchè, eſſendo a^2 lo ſteſſo, che aa, ed a^4 lo ſteſſo, che $aaaa$, il prodotto di a^2 per a^4 ſarà lo ſteſſo, che il prodotto di aa moltiplicato per $aaaa$, il qual prodotto è $aaaaaa$, cioè a^6 (§. 14.).

21. Per dividere una poteſtà di a per un' altra poteſtà di a ſi leverà l' eſponente del diviſore dall' eſponente del dividendo, e il reſiduo ſarà l' eſponente del quoziente; ſicchè per dividere a^5 per a^3 ſi leverà l' eſponente 3 del diviſore a^3 dall' eſponente 5 del dividendo a^5, il reſiduo 2 ſarà l' eſponente del quoziente, dimodochè tale quoziente ſarà a^2. Imperciocchè, eſſendo a^5 lo ſteſſo, che $aaaaa$, ed a^3 lo ſteſſo, che aaa, il quoziente di a^5 diviſo per a^3 ſarà lo ſteſſo, che il quoziente di $aaaaa$ diviſo per aaa, cioè aa, o dicaſi a^2.

22. Dalla precedente regola conſegue, che, ſe ſi dividerà a per a, o dicaſi a^1 per a^1, il quoziente ſarà a^{1-1}, ovvero a^0, ma il quoziente di a diviſo per a è uguale alla unità (§. 12.), adunque a^0 ſarà equivalente ad 1; e perchè, ſe ſi divide ancora a^0 per a^1, il quoziente ſarà a^{0-1}, ovvero a^{-1}, e dividendo a^0 per a^2, il quoziente ſarà a^{-2}, e dividendo a^0 per a^3, il quoziente ſarà a^{-3}; così ſe ſi ſeguiterà la diviſione, s' avrà la ſerie di poteſtà a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, a^{-6}, ec. $a^{-\infty}$, gli eſponenti delle quali ſono negativi, ove $a^{-\infty}$ appreſenta a^0, o dicaſi 1 diviſo per a^∞, cioè per l' infinità poteſtà di a, e conſeguentemente $a^{-\infty}$ ſarà una quantità infinitamente picciola.

23. Ora, poichè a^0 è uguale ad 1, e che il quoziente di a^0 diviſo per a^1 ſi può altresì rappreſentare ſcrivendo $\frac{1}{a^1}$ (§. 12.), così ſarà $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$: parimenti, ſiccome il quoziente di a^0, o dicaſi di 1 diviſo per a^2 ſi può rappreſentare ſcrivendo $\frac{1}{a^2}$, così $\frac{1}{a^2}$ ſarà lo ſteſſo, che a^{-2}, e per la ſteſſa ragione ſi troverà, che a^{-3} ſarà

uguale ad $\frac{1}{a^3}$, che a^{-4} ſarà lo ſteſſo che $\frac{1}{a^4}$. E generalmente, ſe n rappreſenta un qualſivoglia numero ſarà a^{-n} lo ſteſſo, che $\frac{1}{a^n}$.

24. Siccome per dividere a^s per a^{-n} ſi dee ſottrarre l' eſponente $-n$ del diviſore a^{-n} dall' eſponente del dividendo a^s; così il quoziente di a^s diviſo per a^{-n} ſarà a^n. Ma il quoziente di a^s, o dicaſi di 1 diviſo per a^{-n} ſi può altresì rappreſentare ſcrivendo $\frac{1}{a^{-n}}$; adunque $\frac{1}{a^{-n}}$ ſarà lo ſteſſo, che a^n.

25. Si ſcorge adunque, che una qualſivoglia poteſtà col ſuo eſponente negativo ſi può ſenza mutare il ſuo valore trasformare in modo, che il ſuo eſponente reſti poſitivo, e così vicendevolmente, il che ſi fa (ſupponendo, che la poteſtà propoſta ſia un intero) col mutare il ſegno all' eſponente della poteſtà, e indi ponendo la medeſima poteſtà col ſegno mutato dell' eſponente per denominatore di un rotto, il cui numeratore ſia l' unità.

26. Che ſe le poteſtà, le quali hanno eſponenti negativi, ſi trovaſſero moltiplicate per qualche quantità, come ſe in vece di a^{-n} s' aveſſe $q\,a^{-n}$, dove q rappreſenta

qualſivoglia quantità, ſi proverà, che $q\,a^{-n}$ è lo ſteſſo, che $\frac{q}{a^n}$: imperciocchè, eſſendo a^{-n} lo ſteſſo, che $\frac{1}{a^n}$, $q\,a^{-n}$, o dicaſi $q \times a^{-n}$ ſarà lo ſteſſo, che $q \times \frac{1}{a^n}$, ovvero lo ſteſſo, che $\frac{q}{a^n}$.

27. Adunque, ſe una poteſtà col ſuo eſponente negativo ſi trova moltiplicata per qualche quantità, ſi potrà ſenza mutare il ſuo valore trasformare in modo, che il ſuo eſponente reſti poſitivo, e così vicendevolmente, il che ſi fa col mutare il ſegno all' eſponente della poteſtà, e indi porre la medeſima poteſtà col ſegno mutato dell' eſponente per denominatore d' un rotto, il cui numeratore ſia la quantità, per cui tale poteſtà ſi trovava moltiplicata.

28. Finalmente, ſe la poteſtà propoſta foſſe contenuta in un rotto, baſterà mutare l' eſponente della poteſtà, e col ſegno mutato farla paſſare dal numeratore nel denominatore, o contrariamente dal denominatore nel numeratore, ſecondochè la detta poteſtà ſi troverà nel numeratore, o nel denominatore. Se ſi voleſſe trasformare la poteſtà a^{-3}, che è contenuta nella

frazione $\frac{b\,a^{-3}}{4}$ in modo, che l'eſponente di tale poteſtà diventaſſe poſitivo, s'avrebbe $\frac{b}{4\,a^3}$, e ſe ſi voleſſe trasformare la poteſtà b^{-2}, che è contenuta nella frazione $\frac{m\,c}{b^{-2}}$, s'avrebbe $m\,c\,b^2$..

29. Allorchè ſi dee innalzare una data poteſtà alla ſeconda, alla terza, alla quarta ec. poteſtà, ſi moltiplicherà l'eſponente della data poteſtà per l'eſponente della poteſtà, alla quale ſi dee innalzare, ed il prodotto ſarà l'eſponente della poteſtà ricercata.

Per eſempio ſe ſi dee elevare la poteſtà a^2 alla terza poteſtà, ſi moltiplicherà l'eſponente 2 per l'eſponente 3, e s'avrà 6 di prodotto; onde a^6 ſarà la terza poteſtà di a^2; imperciocchè, eſſendo a^2 lo ſteſſo, che $a\,a$, il cubo di a^2 ſarà lo ſteſſo, che il cubo di $a\,a$, ma il cubo di $a\,a$ è $a\,a\,a\,a\,a\,a$, cioè a^6, adunque il cubo, o dicaſi la terza poteſtà di a^2 ſarà a^6; parimente per innalzare a^3 alla quarta poteſtà, ſi moltiplicherà l'eſponente 3 per l'eſponente 4, e s'avrà 12.: ſicchè a^{12} ſarà la quarta poteſtà di a^3.

30. Per eſtrarre la radice da una qualche poteſtà ſi divide l'eſponente della po-

teſtà pel numero, che indica la radice, che ſi dee eſtrarre, e il quoziente ſarà l'eſponente della radice ricercata. Perciò, ſe ſi voglia la terza radice di a^6, ſi dividerà l'eſponente 6 per 3, e s'avrà il quoziente 2, che ſarà l'eſponente della radice ricercata; ſicchè eſſa radice ſarà a^2: imperciocchè, ſiccome per innalzare a^2 alla terza poteſtà, biſogna moltiplicare l'eſponente 2 per l'eſponente 3 per avere l'eſponente 6 della poteſtà ricercata, così per eſtrarre la terza radice di a^6, ſi dovrà dividere l'eſponente 6 per 3 per avere l'eſponente 2 della radice, che ſi ricerca; e così ancora per avere la ſeconda radice di a^1, ſi dividerà l'eſponente 1 per 2, e s'avrà $a^{\frac{1}{2}}$, che ſarà la radice quadrata di a^1; per la ſteſſa ragione ſarà $a^{\frac{1}{3}}$ la terza radice di a^1, e ſarà $a^{\frac{1}{4}}$ la quarta radice di a^1; così ancora $a^{\frac{2}{5}}$ ſarà la quinta radice di a^2; onde chiaramente ſi vede, che le quantità $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ec., le quali hanno il ſegno radicale, ſi poſſono altresì rappreſentare in queſt'altra guiſa $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ ſenza mutarne il valore.

CAPO II.

Del modo di calcolare le Quantità compoſte, e primieramente del modo di ſommarle.

31. Si ſommano le quantità compoſte, ſcrivendo le une dopo le altre, laſciando a ciaſcuna il ſuo riſpettivo ſegno, indi ſi corregge l'eſpreſſione, ſe fia di biſogno. Sicchè, ſe con $a - b$ ſi dee ſommare $c - d$, la ſomma ſarà $a - b + c - d$. Se alla quantità $2a^2 + b^2$ ſi dee aggiugnere $a^2 - b^2$, s'avrà la ſomma $2a^2 + b^2 + a^2 - b^2$; ma perchè $2a^2 + a^2$ è lo ſteſſo, che $3a^2$, e che $+b^2 - b^2$ s' elidono, così la ſomma delle quantità propoſte ſarà $3a^2$.

Della ſottrazione delle quantità compoſte.

32. Per ſottrarre le quantità compoſte ſi uniſcono le due quantità propoſte, mutando i ſegni a quella, che ſi deve ſottrarre, indi ſi corregge l'eſpreſſione. Per ſottrarre $c - d$ da $a + b$, il reſiduo ſarà $a + b - c + d$: imperciocchè, dovendoſi dalla quantità $a + b$ ſottrarre la quantità c diminuita della quantità d, ſi ſcorge, che, ſe da $a + b$ ſi leva la quantità c, ſi leva di troppo, onde il rimanente $a + b - c$ rie-

ſce minore di ciò, che dovrebbe eſſere della quantità d; laonde per avere il vero reſiduo dovraſſi aggiugnere eſſa quantità d. Per ſottrarre $2a - 3bc$ da $2bc + 4a$ ſi ſcriverà $2bc + 4a - 2a + 3bc$; e perchè, facendo la riduzione, $2bc + 3bc$ è lo ſteſſo, che $5bc$, e $4a - 2a$ è lo ſteſſo, che $2a$, così il reſiduo ſarà $5bc + 2a$.

Della moltiplicazione delle Quantità compoſte.

33. Per moltiplicare le quantità compoſte ſi ſcrive l' una ſotto l' altra, indi tutti i termini del moltiplicando ſi moltiplicano per ciaſcun termine del moltiplicatore, e ſe ne ſcrive il prodotto ſotto una linea

$$\begin{array}{l} 2a + 2bc - 3c \\ 3a + 3bc - 2c \\ \hline 6aa + 6abc - 9ac \\ \quad + 6abc \quad + 6b^2c^2 - 9bc^2 \\ \quad\quad - 4ac \quad - 4bc^2 + 6c^2 \\ \hline 6aa + 12abc - 13ac + 6b^2c^2 - 13bc^2 + 6c^2 \end{array}$$

Se ſia propoſto a moltiplicarſi la quantità $2a + 2bc - 3c$ per la quantità $3a + 3bc - 2c$, ſi ſcriverà il moltiplicatore $3a + 3bc - 2c$ ſotto la quantità da moltiplicarſi $2a + 2bc - 3c$, indi tirata una

linea al di ſotto, ſi moltiplicherà queſta pel primo termine $3a$ del moltiplicante; dicendoſi $2a$ per $3a$ produce $6aa$, $+2bc$ per $+3a$ dà $6abc$, $-3c$ per $+3a$ produce $-9ac$, e queſti prodotti ſi ſcriveranno ſotto la linea. Dappoi ſi moltiplicherà di nuovo la medeſima quantità poſta al di ſopra pel ſecondo termine $3bc$ del moltiplicante; dicendo $2a$ per $3bc$ produce $6abc$; e ſiccome ſi ha già un altro prodotto $6abc$, che ha le medeſime lettere, così ſi ſcriverà queſto ſotto l'altro, ciò, che ſempre ſi deve praticare per rendere più facile la riduzione. Inoltre $2bc$ per $3bc$ dà $6b^2c^2$; e perchè non v'è alcun altro termine eſpreſſo colle medeſime lettere, ſi ſcriverà $6b^2c^2$ in fila, e più avanzato verſo la dritta; $-3c$ per $+3bc$ produce $-9bc^2$; finalmente moltiplicati tutti i termini $2a+2bc-3c$ pel terzo termine $-2c$ del moltiplicante, s'avranno li prodotti $-4ac-4bc^2+6c^2$. Pertanto ſommati tutti li prodotti inſieme, e fatta la riduzione, s'avrà la quantità $6aa+12abc-13ac+6b^2c^2-13bc^2+6c^2$, che ſarà il prodotto ricercato.

34. Avvertaſi, che alcuna volta non è neceſſario di fare la moltiplicazione nel modo ſovra eſpreſſo, ma baſta indicarla

col ſegno della moltiplicazione, tirando però una linea retta ſopra ciaſcuna delle quantità da moltiplicarſi, la quale s'eſtenda ſopra tutti i termini di quelle; perciò, ſe s'abbia a moltiplicare $ab - 2bc$ per $a^2 - c^2$, ſi ſcriverà $\overline{ab - 2bc} \times \overline{a^2 - c^2}$.

Della Diviſione delle quantità compoſte.

35. Per dividere una quantità compoſta per una quantità ſemplice, baſta dividere ciaſcun termine della quantità compoſta per la quantità ſemplice (§. 12.). Per dividere $ac - ab$ per a, ſi dividerà ogni termine di $ac - ab$ pel diviſore a; e ſiccome dalla diviſione del primo termine ac pel diviſore a ſi ha il quoziente $+c$, e dalla diviſione del ſecondo termine $-ab$ pel diviſore a ſi ha il quoziente $-b$; così il quoziente di $ac - ab$ diviſo per a ſarà $c - b$.

36. Se poi il dividendo, e il diviſore ſaranno quantità compoſte: come ſe ſi doveſſe dividere $a^4 - b^4$ per $a + b$: ſi comincerà a ſcrivere il diviſore $a + b$, e tirata una linea alla dritta, dopo di queſta ſcrivaſi il dividendo $a^4 - b^4$;

poſcia per procedere con qualche ordine pigliſi nel dividendo un termine, in cui vi ſia una lettera, la quale abbia l'eſponente maggiore, che in qualſivoglia altro termine; ſicchè nel dividendo $a^4 - b^4$ ſi potrà pigliare a^4, perchè non v'è termine, in cui vi ſia una maggior poteſtà della lettera a; per la medeſima ragione ancora potrebbeſi eleggere il termine $- b^4$. Avendo dunque preſo $+ a^4$, ſi dividerà per quel termine del diviſore, in cui la ſteſſa lettera a avrà maggior eſponente, cioè per $+ a$, e fatta tale diviſione, trovandoſi $+ a^3$ di quoziente, ſcriveraſſi a^3 ſotto il diviſore $a + b$, e per lo ſteſſo quoziente ſi moltiplicherà tutto il diviſore $a + b$; indi ſottriſi il prodotto $a^4 + a^3 b$ dal dividendo $a^4 - b^4$, e s'avrà $a^4 - b^4 - a^4 - a^3 b$ di reſiduo; ſicchè fatta la riduzione, cioè cancellando i termini $a^4 - a^4$, che s'elidono, s'avrà il reſiduo $- b^4 - a^3 b$. Di nuovo in queſto reſiduo prendaſi quel termine, in cui la lettera a già preſa da principio abbia il maggior eſponente, che in qualſivoglia altro termine del detto avanzo, il quale ſi è $- a^3 b$, e diviſo $- a^3 b$ per a, che è il termine già da principio eletto nel diviſore, s'avrà $- a^2 b$ di quoziente, che ſi ſcriverà a lato del primo

quoziente $+ a^3$ già ritrovato. In oltre per lo ſteſſo quoziente $- a^2 b$ ſi moltiplichi il diviſore, e il prodotto $- a^3 b - a^2 b^2$ ſottratto dal primo reſto $- b^4 - a^3 b$, e fatta indi la riduzione, s' avrà il reſiduo $- b^4 + a^2 b^2$. Non altrimenti di prima eleggaſi in queſt' ultimo reſiduo un termine, in cui la ſteſſa lettera a abbia il maggior eſponente, per eſempio $a^2 b^2$, e queſto diviſo per $+ a$, che è il termine del diviſore già da principio eletto, darà di quoziente $+ a b b$ da ſcriverſi preſſo il quoziente in ultimo luogo ricavato, e per queſto quoziente ſi moltiplichi altresì tutto il diviſore, e il prodotto $a^2 b^2 + a b^3$ levato dall' ultimo reſiduo $- b^4 + a^2 b^2$, rimarrà, corretta l'eſpreſſione, $- b^4 - a b^3$. Finalmente preſo in queſto reſiduo il termine $- a b^3$, cioè quello, in cui la lettera a ſi trova innalzata alla maggior poteſtà di ciò, che ſia in qualſivoglia altro termine del dividendo, e diviſo per lo ſteſſo termine a del diviſore, pongaſi il quoziente $- b^3$ a canto degli altri quozienti parziali, indi per queſt' ultimo quoziente ſi moltiplichi come ſopra lo ſteſſo diviſore, e ſottratto parimente il prodotto $- a b^3 - b^4$ dall' ultimo avanzo $- b^4 - a b^3$, ſi troverà, che tutti i termini ſi cancellano. Terminata così la di-

viſione, s' avrà per quoziente la ſomma dei quozienti parziali $a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$, che ſi ſono ſcritti ſotto il diviſore.

37. Se poi con tale procedimento non ſi poteſſe ridurre a fine la propoſta diviſione, ma vi reſtaſſe un qualche avanzo, il quale non foſſe diviſibile pel termine del diviſore preſo da principio; come ſe foſſe propoſto a dividerſi $a^4 - b^4 + c d^3$ per $a + b$, dove ſi troverebbe, dopo aver fatte le dovute operazioni, l'avanzo cd^3, il quale non ſi potrebbe dividere per a, in tal caſo s'aggiugnerà al quoziente ritrovato $a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$ la frazione $\frac{c d^3}{a + b}$, il cui numeratore ſarà l'avanzo $c d^3$, e il denominatore $a + b$, che è il dato diviſore: laonde in tale guiſa il quoziente della propoſta diviſione ſarebbe $a^3 - a^2 b + a b b - b^3 + \frac{c d^3}{a + b}$, il qual quoziente ſi potrebbe altresì rappreſentare con un ſol rotto, ponendo l'intera quantità da dividerſi $a^4 - b^4 + c d^3$ pel numeratore, e pel denominatore il dato diviſore $a + b$, di ſorta, che la frazione $\frac{a^4 - b^4 + c d^3}{a + b}$ indicherebbe il quoziente ricercato.

38. Le poteſtà delle quantità compoſte s' ottengono pure colla moltiplicazione (§. 14.). Se ſi moltiplicherà la quantità $a+b$ una volta in ſe ſteſſa, il prodotto $a^2+2ab+b^2$ ſarà il quadrato di quella, e moltiplicandoſi la quantità $a+b$ due volte in ſe ſteſſa, il prodotto $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ſarà il cubo, e ſe la quantità $a+b$ ſi moltiplicherà tre volte in ſe ſteſſa, il prodotto $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ darà la quarta poteſtà, e così ſeguitando ſi troverà la quinta, e la ſeſta ec. poteſtà di $a+b$, come ſi oſſerva nella ſeguente tavola, che ſi potrà eſtendere a beneplacito.

TAVOLA DELLE POTESTÀ DI $a+b$.

$a+b$

$a^2+2ab+b^2$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

39. Giacchè dalla tavola delle poteſtà (§. 38.) riſulta, che il quadrato d' una qualſivoglia quantità $a+b$ compoſta di due

termini, o ſia di due parti, contiene i quadrati aa, bb di ciaſcuna d'eſſe parti, e di più $2ab$, che è il doppio prodotto, che ſi fa delle ſteſſe parti, conſegue, che, conſiderando una quantità di tre termini $a+b+c$ come compoſta di due termini, de' quali il primo ſia $a+b$, il ſecondo ſia c; il quadrato di tale quantità ſarà altresì compoſto dal quadrato della prima parte $a+b$, dal doppio prodotto d'eſſa prima parte moltiplicata per la ſeconda c, e dal quadrato della ſeconda; ma il quadrato di $a+b$ è compoſto dal quadrato di a, dal doppio prodotto di a moltiplicato per b, e dal quadrato di b; dunque il quadrato di una qualſivoglia quantità compoſta di tre termini contiene il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine moltiplicato pel ſecondo, il quadrato del ſecondo, il doppio prodotto, che ſi fa dai due primi termini moltiplicati pel terzo con il quadrato del terzo.

Non altrimenti conſiderandoſi la quantità compoſta di quattro termini $a+b+c+d$, come una quantità di due termini, de' quali il primo ſia $a+b+c$, e il ſecondo ſia d; il quadrato di tale quantità conterrà altresì il quadrato del primo termine

mine $a + b + c$, il doppio prodotto del primo moltiplicato pel ſecondo d, e il quadrato d' eſſo ſecondo; ma il quadrato di $a + b + c$ contiene il quadrato di a, il doppio prodotto di a moltiplicato per b, il quadrato di b, il doppio prodotto di $a + b$ moltiplicato per c con il quadrato di c. Adunque il quadrato di $a + b + c + d$ contiene il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine moltiplicato pel ſecondo, il quadrato del ſecondo, il doppio prodotto dei due primi termini moltiplicati pel terzo, il quadrato del terzo, il doppio prodotto dei tre primi termini moltiplicati pel quarto, e il quadrato del quarto.

Nella ſteſſa maniera s' arriverà a conoſcere, che il quadrato di una quantità di cinque termini contiene, oltre il quadrato dei quattro primi termini, il doppio prodotto d' eſſi quattro primi moltiplicati pel quinto, con il quadrato del quinto, e che il quadrato di quella quantità, che ha ſei termini, contiene, oltre il quadrato dei cinque primi termini, il doppio prodotto d' eſſi cinque primi termini moltiplicati per lo ſeſto, e il quadrato del ſeſto; e così ſeguitando, ſe i termini d' una qualſivoglia quantità foſſero in maggior numero.

40. Occorrendo, che uno, o più termini della quantità propoſta aveſſero il ſegno —, in tal caſo ſi dovrà nella tavola (§. 38.) ai quadrati di tali termini ſempre prefiggere il ſegno +, ed agli altri prodotti ſi prefiggerà il ſegno +, allorchè le parti, dalle quali ſono formati, hanno ammendue il ſegno +, od ammendue il ſegno —; ed all'oppoſito ſi dovrà ai detti prodotti prefiggere il ſegno —, ſe una delle parti, dalle quali è formato, avrà il ſegno +, l'altra il ſegno —; il tutto a norma delle regole date (§. 10.)

41. Dalla tavola delle poteſtà (§. 38.) ſi comprende pure, che il cubo d'una quantità di due termini, come $a + b$, contiene il cubo del primo termine, tre quadrati del primo termine moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del ſecondo termine. Per la qual coſa, conſiderando una quantità di tre termini $a + b + c$ come compoſta di due ſoli termini, de' quali uno ſia $a + b$, ed il ſecondo ſia c, il cubo di tale quantità conterrà il cubo di $a + b$, che ſi conſidera come primo termine, tre quadrati di queſto primo moltiplicati pel ſecondo c, tre quadrati del ſecondo termine moltiplicati pel primo $a + b$,

ed il cubo del ſecondo; ma il cubo del primo termine $a+b$ contiene il cubo di a, tre quadrati del primo moltiplicati pel ſecondo b, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del ſecondo; perciò il cubo della quantità $a+b+c$ contiene il cubo del primo termine, tre quadrati del primo moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, il cubo del ſecondo, tre quadrati dei due primi termini moltiplicati pel terzo, tre quadrati del terzo moltiplicati per li due primi, ed il cubo del terzo.

Parimenti, conſiderando una quantità di quattro termini $a+b+c+d$, come ſe foſſe compoſta di due termini, dei quali uno ſia $a+b+c$, l'altro ſia d, il cubo di tale quantità conterrà il cubo del primo termine, tre quadrati del primo moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, il cubo del ſecondo, i tre quadrati della ſomma dei due primi moltiplicati pel terzo, tre quadrati del terzo moltiplicati per la ſomma dei due primi, il cubo del terzo, tre quadrati della ſomma dei tre primi termini moltiplicati pel quarto, tre quadrati del quarto moltiplicati per la ſomma dei tre primi, il cubo del quarto.

Generalmente adunque, ſe s' avrà una quantità di cinque, di ſei ec. termini, il cubo di quella, che ne ha cinque, conterrà, oltre il cubo dei quattro primi termini, tre quadrati della ſomma dei quattro primi moltiplicati pel quinto, i tre quadrati del quinto moltiplicati per la ſomma dei quattro primi, con il cubo del quinto. Il cubo poi di quella, che ha ſei termini, conterrà, oltre il cubo dei cinque primi, tre quadrati della ſomma dei cinque primi moltiplicati per lo ſeſto, tre quadrati del ſeſto moltiplicati per la ſomma dei cinque primi, con il cubo del ſeſto; e così ſeguitando, ſe s' aveſſe una quantità di un maggior numero di termini.

42. Occorrendo che uno, o più termini della quantità abbiano il ſegno —, i cubi di tali termini dovranno altresì avere il ſegno —. I prodotti poi, che ſi faranno moltiplicando un termine per un'altro, avranno il ſegno, che ſi compete a tenore della regola data (§. 10.)

43. Collo ſteſſo metodo ſi potrà venire in cognizione dei prodotti appartenenti alla quarta, quinta ec. poteſtà di una quantità, che abbia più di due termini.

Dell' eſtrazione delle radici dalle quantità compoſte.

44. Per eſtrarre la radice dalle quantità compoſte, ſi devono prima d' ogni coſa ordinare i termini di eſſe relativamente ad una qualche lettera, il che ſi fa ponendo per primo termine quello, in cui tale lettera ha la poteſtà maggiore, che in qualſivoglia altro termine della quantità propoſta, per ſecondo termine quello, in cui la medeſima lettera ha la poteſtà più proſſima alla maggiore, e così ſucceſſivamente ſi diſporranno gli altri termini ſino a quello, che più non contiene eſſa lettera.

45. Debbaſi eſtrarre la radice quadrata dalla quantità $2ab + b^2 + a^2$. Si ordineranno i termini di queſta ſecondo una d' eſſe due lettere, e per eſempio per a, e ſi avrà $a^2 + 2ab + b^2$. Ciò fatto ſi rifletta, che il quadrato di una quantità compoſta di due termini (§. 39.) è coſtituito dal quadrato del primo termine, dal prodotto, che ſi fa dal doppio del primo termine moltiplicato pel ſecondo, e dal quadrato del ſecondo. Avendo pertanto preſente queſto teorema, ſi cavi la radice quadrata dal primo ter-

mine aa, e sarà a, la quale si scrivera alla sinistra della quantità proposta, e sarà il primo termine della radice ricercata; indi si sottragga il quadrato di a dalla quantità proposta, e corretta l'espressione s'avrà di residuo $2ab + bb$; dividasi il secondo termine $2ab$ per $2a$, che è il doppio del primo termine della radice, il quoziente $+ b$ sarà il secondo termine d'essa radice, il quale moltiplicato pel divisore $2a$ darà il prodotto $2ab$, e questo sottratto dall' avanzo $2ab + bb$ della quantità proposta s' avrà di rimanente b^2, si quadri il secondo termine della radice, e si sottri questo quadrato dal divisato avanzo, e si vedrà, che non rimarrà più nulla; e però $a + b$ sarà la radice ricercata.

Debbasi parimente estrarre la radice quadrata dalla quantità $4a^4 - 16aab + 12aac + 16bb - 24bc + 9cc$, la quale è già ordinata relativamente alla lettera a; si estragga la radice quadrata dal primo termine $4a^4$, e s'avrà $2a^2$, che sarà la prima parte della radice; sottraggasi il quadrato di $2a^2$, cioè $4a^4$ dalla quantità proposta, indi dividasi il primo termine $-16aab$ del rimanente $-16aab + 12aac + 16bb - 24bc + 9cc$ per $4a^2$, che è il doppio della prima parte

della radice, e s' avrà $-4b$ di quoziente, che ſarà un' altro termine della radice ricercata: dappoi moltiplicato il quoziente $-4b$ pel diviſore $4aa$, e fatto il quadrato del medeſimo quoziente, s'avrà la quantità $-16a^2b+16bb$, che ſottratta dal rimanente $-16a^2b+12aac+16bb-24bc+9cc$, s' avrà di reſiduo $+12aac-24bc+9cc$: ſi divida il primo termine $12aac$ d' eſſo reſiduo per $4a^2$, che è il doppio del primo termine della radice, e s'avrà il quoziente $3c$, che ſarà altresì un' altro termine della radice: poſcia ſi moltiplichi $4aa-8b$, cioè il doppio dei due termini della radice già ritrovati, pel quoziente $3c$, e s'avrà il prodotto $12aac-24bc$, che col quadrato di $3c$ darà la quantità $12aac-24bc+9cc$, e perchè queſta ſottratta dall' ultimo reſiduo della quantità propoſta nulla più rimane, così ſarà $2aa-4b+3c$ la radice ricercata (§. 39.)

46. Ma, ſe la quantità propoſta foſſe ſtata $4a^4-16aab+12aac+16bb-24bc+9cc+d^2$, dimodochè fatte le diviſate ſottrazioni ſi aveſſe di reſiduo il termine d^2, il quale non è diviſibile per $4a^2$, in ſimil caſo ſi dee conchiudere, che dalla propoſta quantità non ſi può

eſtrarre la radice ricercata; onde per indicare tale radice ſi porrà il ſegno radicale avanti la propoſta quantità, di modo che eſſo ſegno s' eſtenda ſopra tutti i termini della medeſima

$$\sqrt{4a^4 - 16aab + 12aac + 16bb - 24bc + 9cc + d^2}$$

47. Per eſtrarre la radice cubica da una quantità compoſta, ſe ne ordineranno i termini a norma del §. 44, indi ſi rifletterà, che il cubo di una qualſivoglia quantità compoſta di due termini contiene il cubo del primo termine, tre quadrati del primo termine moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del ſecondo. (§.41.)

48. Debbaſi eſtrarre la radice cubica dalla quantità $a^3 + b^3 + 3bba + 3aab$. Se ne ordinino i termini relativamente ad una d'eſſe lettere, e per eſempio alla lettera a, e s'avrà $a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$, indi, avendo preſente il teorema dell'antecedente paragrafo, ſi cavi la radice cubica del primo termine a^3, che è a, e ſarà queſto il primo termine della radice ricercata. Dappoi ſottraggaſi dalla quantità propoſta il cubo di a, che è a^3, e s'avrà di rimanente $3aab + 3abb + b^3$; ma ſiccome dalla quantità propoſta ſi è già

levato il cubo del primo termine, il rimanente $3aab + 3abb + b^3$ conterrà ancora tre quadrati del primo termine moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del ſecondo. Perciò dividaſi il primo termine $3aab$ d'eſſo rimanente per $3aa$, che è il triplo quadrato del primo termine della radice, il quoziente b ſarà il ſecondo termine della radice; in oltre ſi moltiplichi $3aa$ triplo del quadrato del primo termine della radice pel ſecondo b, s'avrà $3aab$; ſi moltiplichi ancora $3bb$, che è il triplo quadrato del ſecondo termine pel primo a, s'avrà $3bba$, a queſti prodotti aggiungaſi b^3 cubo del ſecondo termine b, s'avrà la quantità $3aab + 3bba + b^3$, la quale ſottratta dall'avanzo $3aab + 3bba + b^3$ della quantità propoſta, nulla più vi rimane: ſicchè ſarà $a + b$ la radice ricercata.

Similmente ſia ordinata ſecondo la lettera a la quantità $36a^2b - 12a^2x + 8a^3 + 54ab^2 + 6ax^2 - 36abx + 27b^3 + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$, da cui ſi dee eſtrarre la radice cubica, ſarà $8a^3 + 36a^2b - 12a^2x + 54ab^2 + 6ax^2 - 36abx + 27b^3 + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$: ſi cavi la radice cubica dal primo termine $8a^3$,

che ſarà $2a$, e ſottratto il cubo di queſta dalla quantità propoſta, s'avrà di rimanente $36a^2b - 12a^2x + 54ab^2 + 6ax^2 - 36abx + 27b^3 + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$: pigliſi il triplo quadrato di $2a$, che è $12a^2$, indi per queſto dividaſi il primo termine $36a^2b$ del rimanente, ed il quoziente $3b$ ſarà il ſecondo termine della radice; ſottraggaſi in oltre dal rimanente della propoſta quantità il triplo prodotto, che ſi fa dal quadrato del primo termine $2a$ della radice moltiplicato pel ſecondo $3b$, il triplo prodotto fatto dal quadrato del ſecondo termine moltiplicato pel primo, ed il cubo del ſecondo; cioè $36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$, e s'avrà di reſiduo $-12a^2x + 6ax^2 - 36abx + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$; di nuovo dividaſi il primo termine $12a^2x$ dell'avanzo per $12a^2$ triplo quadrato del primo termine della radice, ed il quoziente $-x$ ſarà il terzo termine della radice; e perchè dal reſiduo $-12a^2x + 6ax^2 - 36abx + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$ levando $-12a^2x + 6ax^2 - 36abx + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$, cioè il triplo prodotto, che ſi fa dal quadrato dei due primi termini moltiplicato pel terzo, il triplo prodotto fatto dal quadrato del terzo moltiplicato per li due primi, ed

il cubo del terzo, nulla rimane da tale ſottrazione, così ſarà $2a+3b-x$ la ricercata radice.

49. Se poi, fatta l'ultima ſottrazione, ſi avrà ancora un qualche avanzo, che non ſarà diviſibile per $12a^2$ triplo quadrato del primo termine, allora ſarà ſegno, che dalla propoſta quantità non ſi può eſtrarre la radice ricercata; nel qual caſo ſi dovrà indicare col ſegno radicale, che ſi eſtenda ſopra tutti i termini della quantità propoſta, ſcrivendo l'indice 3 ſopra il ſegno ſuddetto.

50. Per eſtrarre la radice quarta da una qualche quantità compoſta ſi ordineranno pure i termini di quella ſecondo una qualche lettera; indi ſi rifletterà, che la quarta poteſtà di una qualſivoglia quantità compoſta di due termini contiene la quarta poteſtà della prima parte, il quadruplo del prodotto, che ſi fa dal cubo della prima moltiplicato per la ſeconda, il ſeſtuplo prodotto fatto dal quadrato della prima moltiplicato pel quadrato della ſeconda, il quadruplo prodotto, che ſi fa dal cubo della ſeconda moltiplicato per la prima, e finalmente la quarta poteſtà della ſeconda (§. 38.). Sicchè, ſe ſia propoſta la quantità $d^4+4d^3f+6d^2f^2+4df^3+f^4$

ordinata ſecondo la lettera d, da cui ſi debba cavare la radice quarta, avendo preſente il teorema ſuddetto, ſi comincerà a cavare la quarta radice dal primo termine d^4, e s' avrà d, che ſarà la prima parte della radice, e quindi dalla quantità propoſta ſottratto d^4, cioè la quarta poteſtà della prima parte della radice, ſi dividerà il primo termine $4d^3f$ dell'avanzo pel cubo quadruplicato d' eſſa prima parte, cioè per $4d^3$, e il quoziente f ſarà la ſeconda parte della radice, e ſottratto indi dal detto avanzo $4d^3 + 6d^2f^2 + 4df^3 + f^4$ il quadruplo prodotto, che ſi fa dal cubo della prima parte moltiplicato per la ſeconda, il ſeſtuplo prodotto fatto dal quadrato della prima moltiplicato pel quadrato della ſeconda, il quadruplo prodotto, che ſi fa dalla prima moltiplicata pel cubo della ſeconda; e finalmente la quarta poteſtà della ſeconda, ſiccome nulla più rimane, così ſarà $d+f$ la ricercata radice.

51. Che ſe da tale ſottrazione rimarrà un qualche reſiduo, che non ſarà diviſibile per $4d^3$, allora dalla propoſta quantità non ſi potrà eſtrarre la radice ricercata, nel qual caſo ſi dovrà indicare col ſegno radicale, che ſi eſtenda ſopra tutti i ter-

mini della quantità propoſta, e ſi ſcriverà l' indice 4 ſopra il ſegno ſuddetto.

52. Praticando lo ſteſſo metodo, ſi potrà coll' uſo della tavola delle poteſtà (§.38.) eſtrarre qualſivoglia radice da qualunque quantità propoſta.

53. Se poi la quantità, da cui ſi dee eſtrarre la radice, ſarà una frazione, in tal caſo ſi dovrà eſtrarre la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore; la radice, che ſi otterrà dal numeratore, ſarà il numeratore, e la radice, che ſi caverà dal denominatore, ſarà il denominatore della radice ricercata. E però $\frac{a-d}{b+c}$ ſarà la radice quadrata del rotto $\frac{a^2-2ad+d^2}{b^2+2bc+c^2}$; la radice cubica di $\frac{c^3+3c^2f+3cf^2+f^3}{m^3-3m^2p+3mp^2-p^3}$ ſarà $\frac{c+f}{m-p}$; e così di altri.

Occorrendo poi, che non ſi poſſa eſtrarre la radice dal numeratore, o dal denominatore, ſi indicherà la medeſima col ſegno radicale, e così la radice quadrata di $\frac{c^2-mn}{a^2+2ad+d^2}$ ſarà $\frac{\sqrt{c^2-mn}}{a+d}$, la radice cubica di $\frac{f^3-3f^2h+3fh^2-h^3}{a^3+4c^2d}$ ſarà $\frac{f-h}{\sqrt[3]{a^3+4c^2d}}$. Finalmente, ſe non ſi potrà cavare la ra-

dice nè dal numeratore, nè dal denominatore, la gamba del ſegno radicale dovrà eſtenderſi ſotto, e ſopra, e così la radice quinta del rotto $\frac{b^4 c - 3 c^3 d^2}{f^2 m^3 + 8 d^4 n}$ ſarà $\sqrt[5]{\frac{b^4 c - 3 c^3 d^2}{f^2 m^3 + 8 d^4 n}}$.

Del Calcolo degli Eſponenti delle quantità compoſte.

54. Nel calcolo degli eſponenti delle quantità compoſte in vece d'inalzare colla moltiplicazione la quantità a qualche poteſtà, rieſce talvolta più ſpediente tirare una linea, che s' eſtenda ſopra tutti i termini di quella, col porre alla dritta d' eſſa linea un numero, che indichi a quale poteſtà la quantità propoſta dee eſſere inalzata. Sicchè per indicare la prima poteſtà di $a + b$ ſi ſcriverà $\overline{a + b}^{1}$, per indicare la ſeconda poteſtà ſi ſcriverà $\overline{a + b}^{2}$, per indicare la terza poteſtà ſi ſcriverà $\overline{a + b}^{3}$, e così $\overline{a + b}^{4}$ indicherà la quarta ec.

55. Dall' addotta maniera di eſprimere le poteſtà di una quantità compoſta ſi

ſcorge, che a queſte ſi poſſono applicare le medeſime regole date pel calcolo degli eſponenti delle quantità ſemplici, di ſorta che per rappreſentare il prodotto della poteſtà $\overline{a+b}^{2}$ moltiplicato per $\overline{a+b}^{4}$ ſi ſommerà l'eſponente 2 della poteſtà $\overline{a+b}^{2}$ coll'eſponente 4 della poteſtà $\overline{a+b}^{4}$, e la ſomma 6 ſarà l'eſponente del prodotto, di modo che tale prodotto ſarà $\overline{a+b}^{6}$.

Per dividere la poteſtà $\overline{a+b}^{7}$ per la poteſtà $\overline{a+b}^{3}$ ſi leverà l'eſponente 3 del diviſore $\overline{a+b}^{3}$ dall'eſponente 7 del dividendo $\overline{a+b}^{7}$, ed il rimanente 4 ſarà l'eſponente del quoziente, e s'avrà $\overline{a+b}^{4}$, che ſarà il quoziente ricercato.

Per inalzare la poteſtà $\overline{a+b}^{2}$ alla terza poteſtà, ſi moltiplicherà l'eſponente 2 della poteſtà $\overline{a+b}^{2}$ per 3, ed il prodotto 6 ſarà l'eſponente della terza poteſtà di $\overline{a+b}^{2}$: ſicchè la poteſtà ricercata ſarà $\overline{a+b}^{6}$.

Per eſtrarre la radice quarta della poteſtà $\overline{a+b}^{8}$ ſi ſcriverà $\overline{a+b}^{2}$, dividendo l'eſponente 8 per 4.

Siccome dividendo $\overline{a+b}^{2}$ per ſe ſteſſo ſi ha di quoziente $\overline{a+b}^{0}$, dividendo $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{1}$ ſi ha $\overline{a+b}^{-1}$; e dividendo $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{2}$ ſi ha $\overline{a+b}^{-2}$, e dividendo $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{3}$ ſi ha $\overline{a+b}^{-3}$ ec., così ſeguitando la diviſione in queſta maniera ſi viene ad avere una ſerie di poteſtà, i cui eſponenti ſono tutti negativi.

Affine poi di ridurre la poteſtà $\overline{a+b}^{-3}$ in modo, che il ſuo eſponente reſti poſitivo, ſi ſcriverà $\frac{1}{\overline{a+b}^{3}}$, e per trasformare altresì la quantità $q \times \overline{a+b}^{-3}$ in modo, che l'eſponente -3 reſti poſitivo, ſi ſcriverà $\frac{q}{\overline{a+b}^{3}}$.

Per trasformare poi la poteſtà $\overline{a+b}^{4}$ in modo, che il ſuo eſponente reſti negativo, ſi ſcriverà $\frac{1}{\overline{a+b}^{-4}}$, e per trasformare la quantità $c \times \overline{a+b}^{2}$, ſi ſcriverà $\frac{c}{\overline{a+b}^{-2}}$.

Per

Per rappreſentare la radice quarta della quantità $\overline{a+b}^{3}$ ſi ſcriverà $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}}$, e così di altre a norma delle regole già date.

CAPO III.

Dell' Eſtrazione delle radici dai numeri.

§. 6. La tavola delle poteſtà regiſtrata (§. 38.) ſomminiſtra le regole, o dicanſi formole per eſtrarre qualſivoglia radice dai numeri. La poteſtà $a^2+2ab+b^2$ ſerve di norma per eſtrarre la radice quadrata da un propoſto numero, la poteſtà $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ſomminiſtra la formola per eſtrarne la radice cubica, e così le altre poteſtà ſucceſſive ſervono per eſtrarre la radice quarta, quinta ec.

Per valerſi di queſte formole è neceſſario ſeparare con alcuni punti i caratteri del numero propoſto, principiando dalla deſtra, e tendendo verſo la ſiniſtra. Se ſi vorrà eſtrarre la radice quadrata, i caratteri ſi ſepareranno da due in due, ſe ſi dovrà eſtrarre la radice cubica, i caratteri ſi ſegneranno da tre in tre, e ſi noteranno da quattro in quattro eſſi caratteri, ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quar-

ta, e così progreſſivamente per eſtrarre altre radici di grado ſuperiore.

In ſecondo luogo fà di meſtiere ſapere a memoria le diverſe poteſtà dei numeri ſemplici, principiando dal due ſino al nove incluſivamente.

Nella tavola ſeguente ſono regiſtrate le poteſtà dei diviſati numeri dalla ſeconda ſino alla quinta poteſtà, e ſarà facile di eſtendere eſſa tavola alle altre poteſtà di un grado ſuperiore.

Numeri naturali	*Poteſtà.*			
	2.da	3.za	4.ta	5.ta
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

Eſtrarre la radice quadrata da un numero propoſto.

57. Debbaſi eſtrarre la radice quadrata dal numero 4096.

$$\begin{array}{r|l} 64 & 4096 \\ \hline 12 & 36 \\ & 49 \\ & 16 \\ & 16 \\ & == \end{array}$$

Se ne ſeparino con punti li caratteri da due in due, principiando dalla deſtra, e venendo alla ſiniſtra; e ſiccome due punti riſultano in queſta ſeparazione, così due eſſere dovranno le cifre nella radice, che ſi ſcriverà a ſiniſtra di una linea tirata a lato del propoſto numero. Ciò fatto, ſi conſideri, che nella ſeconda poteſtà (§.38.) $a^2 + 2ab + b^2$ la lettera a indica la prima cifra della radice, e b la ſeconda cifra, e ſi conoſcerà toſto, che dal propoſto numero ſi dee cavare alla ſiniſtra il quadrato della prima cifra eſpreſſo per a^2, e che venendo verſo la deſtra ſi dee eſtrarre il doppio prodotto della prima cifra nella ſeconda eſpreſſo per $2ab$, e finalmente il quadrato b^2 della ſeconda (§. 38., e 39.): e però dicaſi il maggior quadrato

contenuto nei caratteri 40, che ſono nella prima ſeparazione a ſiniſtra, egli è 36, la cui radice è 6, che ſi ſcriverà nel ſito deſtinato per regiſtrarvi la radice. Sottraggaſi il quadrato 36 da 40, e a deſtra dell' avanzo 4 ſi abbaſſi il 9 terzo carattere del numero propoſto, che così s'avrà 49, il quale diviſo pel doppio della prima cifra 6, cioè per 12, darà di quoziente 4 per la ſeconda cifra della radice corriſpondente alla lettera *b*: ſi ſottri indi da 49 il doppio prodotto di 6 in 4, cioè 48, ed abbaſſato 6 ultimo carattere del propoſto numero a lato dell' avanzo 1, ſi avrà 16, dal quale ſottratto il quadrato di 4 della ſeconda cifra, nulla più rimarrà da queſta operazione; onde 64 ſarà la radice quadrata del propoſto numero.

58. Occorrendo, che la ſeconda cifra della radice, la quale ricavaſi dalla diviſione, foſſe tale, che non ſi poteſſero cavare il doppio prodotto della prima nella ſeconda, ed il quadrato di queſta, in ſimil riſcontro ſi diminuirà eſſa ſeconda cifra di una, o più unità, fino a tanto che ſi poſſano ſottrarre i diviſati prodotti, come ſi può oſſervare in queſt' altro eſempio.

Debbaſi eſtrarre la radice quadrata dal numero 148225.

```
385  | 148225
 6     9
---   --
76     58
       48
       --
      102
       64
       --
       382
       380
       ---
         25
```

Separati i caratteri con punti da due in due riſultano tre punti, e quindi ſi inferiſce doverſi avere tre cifre alla radice. Continuando a ſervirſi della formola per la ſeconda poteſtà (§. 39.), e avendo preſenti le rifleſſioni fatte, dicaſi, il maggior quadrato contenuto nei caratteri 14, prima ſeparazione a ſiniſtra, egli è 9, la cui radice è 3, che ſi ſcriverà nel ſito per eſſa ſtabilito, e ſottratto indi eſſo quadrato 9 da 14, s'avrà 5 d'avanzo, al cui fianco ſi ſcriverà il terzo carattere 8 del propoſto numero, e s'avrà 58, il quale diviſo per 6 doppio prodotto della prima cifra 3 dà 9 di quoziente; ma ſiccome nel ſottrarre da 58 il doppio prodotto della prima nella ſeconda cifra ſi ha ſolamente 4 d'avanzo, e che coll'ab-

baſſare il 2 quarto carattere del propoſto numero più non ſi può da 42 ſottrarre 81, che è il quadrato di 9, così ſi ſcriverà 8 per la ſeconda cifra della radice, giacchè con queſta ſi poſſono ſottrarre i diviſati prodotti.

Sottratto pertanto 48 doppio prodotto della prima nella ſeconda cifra ſi ha 10 d' avanzo, a lato del quale ſi ſcriverà il 2 quarto carattere del numero propoſto, e s' avrà 102, dal quale ſottratto 64 quadrato di 8, s'otterrà l' avanzo 38. S' abbaſſi indi a lato di queſto il quinto carattere 2, e s' avrà 382. Si conſiderino ora le due prime cifre 38 della radice rappreſentate per *a* della formola della ſeconda poteſtà; ſiccome per mezzo delle operazioni già fatte ſi è cavato il quadrato della prima cifra, il doppio prodotto della prima nella ſeconda, ed il quadrato della ſeconda, il che tutto coſtituiſce il quadrato delle due prime cifre (§. 39.), così converrà adeſſo cavare il doppio prodotto d' eſſe due prime cifre nella terza, ed il quadrato della terza. Per trovare adunque la terza cifra, baſta dividere 382 pel doppio di 38, cioè per 76, e ſcrivere il quoziente 5 alla radice; ſottratto pertanto dal 382 il doppio prodotto 380 della ter-

za cifra nelle due prime, s' avrà di reſiduo 2, al fianco del quale s' abbaſſerà l' ultimo carattere 5 del propoſto numero, e s'avrà 25, dal quale ſottratto il quadrato di 5 non rimarrà più nulla; onde 385 ſarà la radice quadrata del propoſto numero.

Collo ſteſſo metodo ſi procederà, allorchè, dopo d' aver fatta per mezzo dei punti la ſeparazione dei caratteri di due in due nel numero propoſto, ſi troverà, che la radice dee avere quattro, cinque ec. cifre, eſſendo tutte queſte operazioni fondate ſulla teoría ſpiegata (§. 39.)

59. Per eſtrarre la radice quadrata da un rotto, converrà cavarla ſeparatamente dal numeratore, e dal denominatore nel modo ſpiegato, e ſcrivere la radice del numeratore per numeratore, e quella del denominatore per denominatore (§. 53.). Operando in queſta conformità ſi troverà, che la radice quadrata di $\frac{169}{576}$ ella è $\frac{13}{24}$, che la radice quadrata di $\frac{1521}{2209}$ è $\frac{39}{47}$.

Se poi il numero, da cui ſi dee eſtrarre la radice, ſarà un intero congiunto con un rotto, ſi ridurrà l' intero in forma di rotto, dopo del che ſi opererà come ſo-

pra, e così, se si dee estrarre la radice quadrata da $28\frac{4}{9}$, ridotto questo numero in forma di rotto, s'avrà $\frac{256}{9}$, la cui radice è $\frac{16}{3}$, o dicasi $5\frac{1}{3}$, la radice quadrata di $4\frac{29}{49}$, riducendo questo numero in forma di rotto, sarà $\frac{225}{49}$, la cui radice è $\frac{15}{7}$, o dicasi $2\frac{1}{7}$.

Estrarre la radice cubica da un numero.

60. Per estrarre la radice cubica da un numero convien valersi della terza potestà $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ per formola, e indi segnare con punti da tre in tre i caratteri del numero proposto, principiando a destra, e venendo verso la sinistra, ed aver presenti le riflessioni eccitate (§.41.). Il numero delle separazioni indicherà quante cifre si avranno alla radice.

Debbasi estrarre la radice cubica dal numero 157464.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 157464 \\ \hline 75 & 125 \\ & \underline{324} \\ & \underline{300} \\ & 246 \\ & \underline{240} \\ & 64 \end{array}$$

Dopo d' averne ſeparati i caratteri da tre in tre ſi troveranno due ſeparazioni, e quindi due eſſere dovranno le cifre nella radice, la prima delle quali ſarà rappreſentata per la lettera a della formola $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, e l' altra per b. Ora, poichè il cubo della prima cifra è incluſo nei tre primi caratteri a ſiniſtra, cioè nel 157, ſi dica, il maggior cubo contenuto in 157 egli è 125, la cui radice è 5; ſcrivaſi 5 alla radice, e ſi ſottri il cubo 125, e s' avrà di reſiduo 32, a lato del quale s' abbaſſerà il quarto carattere 4 del numero propoſto, e s' avrà 324. Dividaſi 324 pel triplo quadrato di 5, cioè per 75, e ſi ſcriva il quoziente 4 per la ſeconda cifra della radice; indi da 324 ſi ſottri 300, che è il prodotto di 75 per 4, ed a fianco dell' avanzo 24 s'abbaſſi il 6 penultimo carattere del propoſto

numero, e s'avrà 246, da queſto ſi ſottri il triplo prodotto fatto dal quadrato di 4 nella prima cifra 5, cioè 240, e s' avrà 6 d'avanzo, al cui lato ſcrivendo l' ultimo carattere 4 del numero propoſto, s' avrà 64, dal quale ſottratto il cubo della ſeconda cifra della radice ſi troverà, che nulla più rimane; e però 54 ſarà la radice cubica del propoſto numero.

61. Occorrendo, che il quoziente, il quale ſi ricava dalla diviſione per avere la ſeconda, la terza ec. cifra della radice, foſſe maggiore di ciò eſigeſi per fare le mentovate ſottrazioni, ſi ſcriverà eſſo quoziente diminuito di una, o più unità, finchè baſti per fare tutte le ſottrazioni, come ſi oſſerva nel ſeguente eſempio.

Sia propoſto il numero 21717639, da cui ſi debba eſtrarre la radice cubica.

279	21717639
12	8
2187	137
	84
	531
	294
	2377
	343
	20346
	19683
	::6633
	6561
	::729
	: :

Fatta la ſolita ſeparazione coi punti, ſi trova, che tre eſſer debbono le cifre alla radice; indi ſi dica, il maggior cubo contenuto in 21, prima ſeparazione a ſiniſtra, egli è 8, la cui radice è 2 da ſcriverſi nel ſito per eſſa aſſegnato, e ſottratto 8 da 21 ſi ha 13 di reſiduo, al cui fianco ſi dee ſcrivere 7 terzo carattere del numero propoſto per avere 137, il quale diviſo per 12 triplo quadrato della prima cifra della radice, ſi ha 9 di quoziente per la ſeconda cifra della radice; ma perchè queſto numero è troppo grande per

poterne poi eſtrarre i ſoliti prodotti, e che lo ſteſſo ſuccede, ſe ſi ſcrive il numero 8, così ſi ſcriverà 7 per la ſeconda cifra della radice, indi ſi ſottrerrà 84 triplo prodotto del quadrato della prima cifra della radice nella ſeconda, e a fianco dell' avanzo 53 s' abbaſſerà l' unità quarto carattere del numero propoſto, e s' avrà 531, dal quale ſi leverà 294 triplo prodotto del quadrato di 7 nella prima cifra 2 della radice, ed a lato dell'avanzo 237 ſi abbaſſerà il 7 quinto carattere del propoſto numero, e da 2377 ſi caverà il cubo di 7, cioè 343, e ſi avrà di reſiduo 2034, al cui fianco s'abbaſſerà il 6 ſeſto carattere del numero propoſto.

Siccome i prodotti parziali ricavati nelle operazioni fin quì fatte coſtituiſcono il cubo delle due prime cifre della radice, e che nel propoſto numero ſi hanno ancora tre prodotti fatti dal quadrato delle due prime cifre 27 della radice nella terza cifra, tre prodotti fatti dal quadrato della terza cifra nelle due prime, ed il cubo della terza cifra (§. 41.), così per avere eſſa terza cifra ſi dividerà l' avanzo 20346 per 2187 triplo prodotto del quadrato di 27, ed il quoziente 9 ſi ſcriverà alla radice. Dall'avanzo 20346 ſi ſottri

19683 triplo prodotto fatto dal quadrato 27 nel numero 9, e s'avrà di reſiduo 663, al cui lato s'abbaſſi il 3 penultimo carattere del numero propoſto, e s'avrà 6633, da cui ſottratto 6561 triplo prodotto fatto dal quadrato di 9 per 27, s'avrà 72 di reſiduo, e collo abbaſſare 9 ultimo carattere del numero propoſto, s'avrà 729, dal quale ſottratto il cubo di 9, nulla più rimarrà; onde 279 ſarà la radice cubica di 21717639.

62. Per eſtrarre la radice cubica da un rotto ſi caverà la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore, e la radice del numeratore ſarà il numeratore, e quella del denominatore ſarà il denominatore; e così la radice cubica di $\frac{27}{125}$ ſarà $\frac{3}{5}$, e quella di $\frac{64}{343}$ ſarà $\frac{4}{7}$.

Se poi il numero, da cui ſi dee eſtrarre la radice, ſarà un intero congiunto con un rotto, ſi ridurrà l'intero in forma di rotto, indi ſi opererà come ſovra, e così la radice cubica di $4\frac{17}{27}$, o dicaſi $\frac{125}{27}$ ſarà $\frac{5}{3}$, o pure $1\frac{2}{3}$; la radice cubica di $3\frac{81}{216}$, o ſia $\frac{729}{216}$ ſarà $\frac{9}{6}$, o dicaſi $1\frac{1}{2}$.

Eſtrarre da un numero la radice di grado ſuperiore al terzo.

63. La regola data (§. 56.) per eſtrarre qualſivoglia radice, eſſendo generaliſſima, baſterà farne vedere l' applicazione a qualche caſo particolare, che non ſia in uſo preſſo gli Aritmetici. Debbaſi eſtrarre la quinta radice dal numero 147008443, ſe ne ſepareranno i caratteri da cinque in cinque coi ſoliti punti, e ſiccome due ſole ſeparazioni riſultano, così due ſaranno le cifre della radice.

43	147008443
1280	1024
	4460
	3840
	=6208
	5760
	=4484
	4320
	1644
	1620
	==243
	= =

Si prenda la quinta poteſtà (§. 38.) $a^5 + 5\,a^4 b + 10\,a^3 b^2 + 10\,a^2 b^3 + 5\,a b^4 + b^5$,

e ſervendoſi di queſta per norma, ed avendo a memoria la tavola (§. 56.) dicaſi, la maggior quinta poteſtà contenuta nei caratteri della prima diviſione a ſiniſtra ella è 1024, la cui radice è 4, che ſi ſcriverà nel ſito della radice, e ſottratto indi 1024 da 1470, s'avrà 446 di reſiduo, ed abbaſſato il zero quinto carattere del numero propoſto, s'avrà 4460, il quale diviſo per 1280, che è il prodotto della quarta poteſtà di 4 per 5, cioè $5a^4$, dà 3 di quoziente ſeconda cifra eſpreſſa per b nella radice; ſi ſottri da 4460 il numero 3840, che è il prodotto di 1280 per 3, additato per $5a^4b$, s'avrà d'avanzo 620, a lato del quale s'abbaſſi 8 ſeſto carattere del numero propoſto, e s'avrà 6208, dal quale ſottratto 5760 prodotto del cubo di 4 per dieci volte il quadrato di 3 corriſpondente al termine $10a^3b^2$, s'avrà d'avanzo 448, al lato del quale s'abbaſſerà il ſettimo carattere 4 del propoſto numero, e s'avrà 4484, da cui ſi eſtrarrà 4320 prodotto fatto da dieci volte il quadrato della prima cifra nel cubo della ſeconda, additato eſſo prodotto da $10a^2b^3$, e s'avrà il reſiduo 164, a lato del quale s'abbaſſerà l'ottavo carattere 4 del propoſto numero, e s'avrà 1644, da

cui ſottratto 1620, che è il quintuplo prodotto fatto dalla prima cifra nella quarta poteſtà della ſeconda, eſpreſſo per $5ab^4$, ſi ha 24 d' avanzo, al cui fianco abbaſſato l' ultimo carattere 3 ſi ha 243, dal quale levando la quinta poteſtà della ſeconda cifra 3 della radice, ſi trova, che nulla più rimane dal propoſto numero; onde 43 ſarà la quinta radice ricercata.

64. Nella ſteſſa maniera ſi dovrà operare per eſtrarre le radici indicate dagli altri numeri primi, vale a dire dai numeri, che non poſſono eſſere miſurati fuorchè dall' unità, come ſono 7, 11, 13, 17, 19, 23 ec.; ma riſpetto alle radici indicate da numeri compoſti, come ſono 4, 6, 8, 10, 12, 16 ec., queſte ſi potranno eſtrarre in una maniera più ſemplice mediante la teoria ſpiegata (§. 30.), ove s' è dimoſtrato, che per eſtrarre la radice da una qualche poteſtà ſi dee dividere l' eſponente della poteſtà pel numero, che indica la radice, che ſi vuol eſtrarre, ed il quoziente ſomminiſtra l' eſponente della radice ricercata; ciò poſto, debbaſi eſtrarre la radice quarta dal numero 1500625, ſe in vece di valerſi della formola appartenente alla quarta poteſtà ſi conſidererà il numero propoſto come una

quarta

quarta poteſtà, il cui eſponente 4, eſſendo diviſo per 2 indice della ſeconda poteſtà, ſomminiſtra 2, di quoziente per l'eſponente della radice, ſi vedrà toſto, che, eſtraendo dal numero propoſto la radice quadrata, s'avrà 1225, che ſarà la ſeconda poteſtà della quarta radice, che ſi cerca, e quindi, eſtraendo da 1225 pure la radice quadrata, s'avrà 35, che ſarà la radice quarta del propoſto numero 1500625.

Parimente, ſe in vece di eſtrarre a dirittura la radice ſeſta dal numero 191102976, ſi conſidererà come una ſeſta poteſtà, il cui eſponente 6 è diviſibile per 2, e per 3, ſi vedrà toſto, che, eſtraendo dal propoſto numero la radice cubica, s'avrà 576, che ſarà la ſeconda poteſtà della radice ſeſta, e quindi, eſtraendo la radice quadrata da 576, s'avrà 24 per la radice ſeſta ricercata; comprendendoſi pure, che ſi otterrà la medeſima radice 24, ſe dal propoſto numero ſe ne eſtrarrà primieramente la radice quadrata, che è 13824, e da queſta ſi eſtrarrà la radice cubica.

Procedendo collo ſteſſo metodo, in vece di eſtrarre a dirittura la radice ottava da un propoſto numero, ſi comincerà a cavare la radice quadrata, la quale ſarà

una quarta poteſtà, da cui ſi eſtrarrà la radice quadrata, e da queſta radice, che ſarà una ſeconda poteſtà, ſi eſtrarrà ancora la radice quadrata, e queſta ſarà la radice ottava ricercata. E così ancora in vece di eſtrarre a dirittura da un numero propoſto la radice nona, ſi eſtrarrà la radice cubica, la quale eſſendo una terza poteſtà, ſi eſtrarrà ancora da queſta la radice cubica, e s' avrà la radice nona ricercata; e così ancora, ſe da un numero ſi dovrà eſtrarre la radice decima, ſi principierà ad eſtrarre la radice quadrata, e da queſta ſi caverà poi la radice quinta; o pure ſi eſtrarrà a dirittura la radice quinta dal numero propoſto, e dalla radice quinta ſi caverà la radice quadrata, e queſta ſarà la radice decima del numero propoſto, e così di altre ec.

65. Se ſi dovranno eſtrarre radici di grado ſuperiore da un qualche rotto, o da numeri interi congiunti con rotti, baſterà regolarſi a norma delle coſe dette (§. 59, 62.) per l' eſtrazione della radice quadrata, e della cubica.

Eſtrarre per approſſimazione le radici dai numeri.

66. Le radici, che come ſovra ſi ſono cavate dai numeri, ſi chiamano *Commenſurabili*, o *Razionali*; ma ſe, dopo d'aver fatte tutte le avanti deſcritte operazioni, riſulterà un qualche reſiduo, allora ſarà ſegno, che la radice del propoſto numero non ſi può eſprimere coi numeri in una maniera preciſa, e che fa d'uopo eſtrarla per approſſimazione. Tali radici ſi chiamano *Incommenſurabili*, *Irrazionali*, *Sorde*. La radice quadrata di 5 è irrazionale, poichè, dopo d'averne eſtratta la radice 2, ſi ha 1 di avanzo. La radice cubica di 38 è pure irrazionale, poichè, dopo d'averne eſtratta la radice 3, ſi trova 11 di avanzo. La quarta radice di 23 è pure ſorda, poichè, dopo d'averne cavata la radice 2, ſi trova 7 d'avanzo, e così di altre.

67. Varj ſono i modi, con cui nell'eſtrarre la radice da un numero, che non è poteſtà perfetta, ſi può approſſimare al vero valore. Fra queſti modi addurremo quello, che ſi pratica coll'aggiugnere tanti zero al numero propoſto, quante ſono le unità contenute nell'indice della radice,

che ſi vuole eſtrarre: l'ultima cifra, che con tal modo di operare ſi ottiene nella radice, eſprime le decime parti di un intero; e così, ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quadrata da 7, che non è un quadrato perfetto, ſi aggiugneranno due zero; ſe ſi dovrà eſtrarre la radice cubica da 45, che non è cubo perfetto, ſi aggiugneranno tre zero; e ſe ne aggiugneranno quattro, ſe ſi vorrà eſtrarre la radice quarta; indi ſi caverà la radice ſecondo il ſolito, e l'ultima cifra di queſta a mano deſtra ſi ſeparerà dalle prime con un punto per additare, che dell'intero eſſa ne contiene tante decime parti, quante ſono le unità contenute in queſta ultima cifra.

68. Per applicare l'addotta regola, debbaſi eſtrarre la radice quadrata da 7, ſi aggiugneranno due zero per avere 700, da cui cavando la radice quadrata nel modo ſolito, s'avrà 2·6 per la radice approſſimata, in cui ſi noterà un punto a ſiniſtra del 6 per additare, ch'eſſa radice è 2 interi, e 6 decimi, non facendoſi più conto dell'avanzo 24. Per eſtrarre la radice quadrata da 1069 ſi aggiugneranno due zero per avere 106900, indi cavata nel modo ſolito la radice, ſi avrà 32.6, e col notare un punto a ſiniſtra dell'ultima cifra 6

ſi additerà, che la radice approſſimata è 32 interi, e 6 decimi.

Per eſtrarre la radice cubica da 42 ſi aggiugneranno tre zero (§. 67.) per avere 42000, e operando in ſeguito nel modo ſolito, ſi troverà, che la radice approſſimata è 3·4, e col notare un punto a ſiniſtra dell' ultima cifra s' additerà, ch'eſſa radice è 3 interi, e 4 decimi, non facendoſi più conto dell' avanzo. E così ancora per eſtrarre la radice cubica da 9761 ſi aggiugneranno tre zero, e s' avrà 9761000, e operando in ſeguito nel modo ſolito, ſi troverà, che la radice approſſimata è 21·3, e col notare un punto a ſiniſtra dell'ultima cifra 3 ſi additerà, ch'eſſa radice è 21 interi, e 3 decimi, non facendoſi più conto dell' ultimo avanzo: collo ſteſſo metodo ſi eſtrarrà la radice quarta, quinta ec. dai numeri, che non ſono quarta, quinta ec. poteſtà perfetta.

69. Per conoſcere il fondamento delle addotte operazioni ſi conſideri che, eſſendo 7 lo ſteſſo, che $\frac{700}{100}$, la radice quadrata d' ambedue queſte eſpreſſioni dee pure eſſere la ſteſſa; eſtratta pertanto la radice approſſimata del numeratore 700, s'avrà 26, e la radice commenſurabile del denominatore ſarà 10, e quindi la radice

quadrata di $\frac{700}{100}$ ſarà $\frac{26}{10}$, o ſia $2\frac{6}{10}$, come ſi è ritrovato di ſopra, ſcritto però in queſt' altra maniera 2·6 per maggior ſemplicità.

Così ancora la radice cubica di 42 ſarà la ſteſſa, che quella di $\frac{42000}{1000}$; ma la radice approſſimata del numeratore è 34, e la radice commenſurabile del denominatore è 10, adunque la radice cubica di $\frac{42000}{1000}$ ſarà $\frac{34}{10}$, o ſia $3\frac{4}{10}$, come s'è trovato quì avanti, ſcritto però in queſt' altra maniera più ſemplice 3·4, come ſuol praticarſi nell' Aritmetica per diſtinguere gl' interi dai rotti in iſpezie.

70. Se ſi vorrà poi approſſimare maggiormente alla vera radice, converrà aggiugnervi un maggior numero di zero; ſe nell' eſtrarre la radice quadrata ſi aggiugneranno quattro zero al numero propoſto, le due ultime cifre della radice ſaranno centeſime parti dell' intero; ſe ſi aggiugneranno ſei zero al propoſto numero, le tre ultime cifre della radice ſaranno milleſime parti dell' intero; e così ſaranno dieci milleſimi le quattro ultime cifre della radice, ſe al propoſto numero ſi ſaranno

aggiunti otto zero. Dovendoſi poi tutte eſſe frazioni decimali ſeparare dagli interi col mezzo di un punto, e così 6·37 indicherà 6 interi, e 37 centeſimi, 48·503 indicherà 48 interi, e 503 milleſimi, 105·0074 indicherà 105 interi, e 74 dieci milleſimi ec.

Per conoſcere il fondamento di queſt'altra operazione, baſta riflettere, che, volendo eſtrarre la radice quadrata da $7 = \frac{70000}{10000}$, ſi ha 264 per la radice approſſimata del numeratore, e 100 radice razionale del denominatore, onde $\frac{264}{100}$ uguaglia $2\frac{64}{100}$, o ſia 2·64.

71. Nella ſteſſa maniera per approſſimarſi maggiormente alla vera radice cubica di una poteſtà imperfetta vi ſi aggiugneranno ſei zero, e allora le due ultime cifre della radice ſaranno centeſime parti dell'intero; ſe poi ſi aggiugneranno nove zero, le tre ultime cifre ſaranno milleſime parti dell'intero, e così di ſeguito, non facendoſi poi più conto dell'ultimo avanzo.

Per approſſimarſi maggiormente nell'eſtrarre la radice quarta da una poteſtà imperfetta, in vece di quattro zero ſe ne aggiugneranno otto, e allora le due

ultime cifre della radice ſaranno centeſime parti dell'intero, ſe ſi aggiugneranno dodeci zero al numero propoſto, le tre ultime cifre della radice ſaranno milleſime parti dell'intero ec.

72. Volendo eſtrarre la radice approſſimata da un rotto, che non ſia poteſtà perfetta, ſi opererà nel numeratore, e nel denominatore, come s'è detto quì avanti, e ſe ſi dovrà eſtrarre la radice approſſimata da un intero congiunto con un rotto, ſi ridurrà tutto il numero propoſto in forma di rotto, indi ſi opererà come avanti; ma perchè le radici approſſimate del numeratore, e del denominatore producono un valore più lontano dal vero, così per approſſimarſi maggiormente baſterà moltiplicare il numeratore, ed il denominatore per un numero tale, che produca una poteſtà perfetta nell'uno, o nell'altro di eſſi.

Per eſempio per eſtrarre la radice quadrata da $\frac{2}{3}$, ſe ſi moltiplicherà ſotto e ſopra per 2, s'avrà $\frac{4}{6}$, in cui il numeratore è un quadrato perfetto, e la radice di queſto rotto ſarà $\frac{2}{2.4}$, cioè preciſa nel

numeratore, ed approſſimata nel denominatore. Se il rotto $\frac{2}{3}$ ſi moltiplicherà per 3, s'avrà $\frac{6}{9}$, in cui il denominatore è un quadrato perfetto, e la radice di queſto rotto ſarà $\frac{2 \cdot 4}{3}$, cioè approſſimata nel numeratore, ed eſatta nel denominatore. Se per eſtrarre la radice cubica da $\frac{9}{4}$ ſi moltiplicherà il rotto per 3, s'avrà $\frac{27}{12}$, in cui il numeratore è un cubo perfetto; onde la radice del rotto ſarà $\frac{3}{2 \cdot 2}$, cioè eſattà nel numeratore, ed approſſimata nel denominatore; ſe poi il rotto $\frac{9}{4}$ ſi moltiplicherà per 2, s'avrà $\frac{18}{8}$, in cui il denominatore è un cubo perfetto, e la radice cubica del propoſto rotto ſarà $\frac{2 \cdot 6}{2}$, cioè approſſimata nel numeratore, e preciſa nel denominatore, e così di altri.

73. Si chiamano frazioni decimali quei rotti, che esprimono decine, centinaia, migliaia ec. di un intero. Nelle radici, che si cavano per approssimazione coll' aggiugnere dei zero al numero proposto, si hanno le frazioni decimali congiunte cogli interi.

Le frazioni decimali si ottengono pure col dividere un numero per un altro, che non lo misura esattamente, e coll' aggiugnere nel dividendo dei zero a beneplacito, o pure finchè nulla più s' abbia di residuo nella divisione.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 75 \\ \hline & 9{\cdot}375 \\ 30 & \\ 60 & \\ 40 & \\ == & \end{array}$$

Nel dividere 75 per 8 si ha 9 di quoziente coll' avanzo 3, scrivasi a destra del 3 un zero, e s' avrà 30, che diviso per 8 dà 3 di quoziente, alla cui sinistra si noterà un punto per separarlo dall' intero 9, e così si dirà, che 9 interi e 3 decimi sono il quoziente approssimato di 75 diviso per 8; ma, se si vorrà il quoziente preciso, converrà aggiugnere altri zero, fin-

chè nulla rimanga dalla diviſione. Nel caſo noſtro coll' aggiugnere tre zero al 75 ſi trova di quoziente eſatto 9.375.

74. Le frazioni decimali ſi ſommano, ſi ſottrano, ſi moltiplicano, ſi dividono, e ſe ne eſtrae pure la radice qualſivoglia.

Per ſommare i decimali congiunti cogli interi convien ſcrivere queſti ultimi gli uni ſotto gli altri col ſolito ordine, cioè le unità nella medeſima colonna, indi le decine a ſiniſtra ec., e notato un punto a deſtra delle unità ſi ſcriverà la frazione decimale ricavata dalla diviſione, o dall' eſtrazione delle radici; indi ſi ſommeranno eſſi numeri, come ſe foſſero altrettanti interi, e nella ſomma ſi noterà pure il punto a deſtra delle unità degli interi. Per ſommare 16.7, 23.65, 108.09, 3.408, ſi ſcriveranno queſti numeri gli uni ſotto gli altri colle additate avvertenze,

16. 7
23. 65
108. 09
3. 408

---

150. 848

---

e ſommati indi ſecondo il ſolito, s' avrà 150. 848; chiaro eſſendo, che la cifra 7

del primo numero nel ſito, che occupa, corriſponde al ſito delle decine del ſecondo e terzo numero, ed al ſito delle centinaia del quarto numero, e che queſte frazioni decimali corriſpondono preciſamente alle ſeguenti,

16. 700
23. 650
108. 090
3. 408

154. 848

le quali danno la medeſima ſomma.

75. Per ſottrarre un numero compoſto di interi, e di decimali da un altro, ſi ſcriveranno pure le cifre col diviſato ordine, indi ſi farà la ſottrazione al ſolito come negli interi.

Per ſottrarre 27.16 da 43.12 ſi ſcriverà

43. 12
27. 16

15. 96

e operando come ſe foſſero interi, ſi avrà di reſiduo 15. 96.

Per ſottrarre 56.417 da 81.9 ſi ſcriverà

81. 9
56. 417

25. 483

e conſiderando, che le 9 decine del numero ſuperiore equivagliono a 900 migliaia, ſi farà la ſottrazione, come ſe la cifra 9 del numero ſuperiore foſſe ſeguitata da due zero, e s'avrà l'avanzo 25.483.

Per ſottrarre 8.4 da 19.061 ſi ſcriverà

19. 061
8. 4

10. 661

e ſupponendo, che le 4 decine del numero inferiore ſieno ſeguitate da due zero, ſi farà la ſottrazione al ſolito, e s'avrà l'avanzo 10. 661.

76. Per moltiplicare le frazioni decimali ſi ſcriverà il moltiplicatore ſotto il moltiplicando, come ſe foſſero numeri interi, e ſi farà la multiplicazione ſecondo il ſolito. Dal prodotto ſi ſepareranno con un punto le decimali, e queſte verranno eſpreſſe da un numero di cifre uguale alla ſomma di quelle, che ſono nei due numeri, che ſi moltiplicano. Per eſempio ſe ſi

moltiplica 24.73 per 8.5 , ſi ſcriverà

24.73
8.5

12365
19784

210.205
---

e fatta la moltiplicazione, ſi ſepareranno nel prodotto tre cifre a deſtra per le decimali, perchè appunto ve ne ſono due nel moltiplicando, ed una nel moltiplicante.

42.07
5.402

8414
16 8280
21035

227.26214

Così ancora col moltiplicare 42.07 per 5.402 s'avrà di prodotto 227.26214, in cui ſi ſepareranno con un punto cinque cifre a deſtra per le decimali, perchè appunto ve ne ſono due nel moltiplicando, e tre nel moltiplicatore.

77. Per dividere le frazioni decimali ſi opererà come nella diviſione degli interi, e nel quoziente ſi ſepareranno con un punto tante cifre a deſtra per le decimali, quante ſaranno le unità, che rimarranno dal ſottrarre il numero delle decimali del diviſore da quello delle decimali del dividendo.

Se ſi divide 24.9048 per 3.459, nel quoziente 72 ſi ſeparerà con un punto una cifra a deſtra, come 7.2, perchè ſottrando il numero 3 delle decimali del diviſore dal numero 4 delle decimali del dividendo, ſi ha 1 d'avanzo: ſe ſi divide 34.72252 per 4.61, s' otterrà il quoziente 7532, nel quale ſi ſepareranno con un punto tre cifre a deſtra per li decimali, come ſi vede 7.532, perchè appunto, eſſendo cinque decimali nel dividendo, e due nel diviſore, ſi ha tre di differenza.

Da queſta regola ſi comprende facilmente che, ſe il numero delle cifre decimali ſarà lo ſteſſo nel dividendo, e nel diviſore, il quoziente non avrà decimali. Se ſi divide 26.88 per 3.84, il quoziente 7 non avrà decimali.

Occorrendo poi, che ſi debba dividere un numero, che non ha decimali, per un altro, che ne ha, converrà aggiugnere al

dividendo tanti zero, quante ſono le cifre decimali nel diviſore, ed il quoziente, che riſulterà da tale diviſione, ſarà pure eſente dai decimali. Volendo dividere 174 per 6.96, ſiccome due ſono le cifre decimali nel diviſore, così, dopo d'aver notato un punto a deſtra del dividendo, ſi ſcriveranno due zero, e fatta la diviſione di 174.00 per 6.96, il quoziente 25 non avrà decimali.

Ultimamente, ſe nel fare la diviſione s'incontrerà in fine un qualche avanzo, ſi aggiugneranno dei zero nel dividendo, i quali rappreſenteranno altrettante cifre decimali (§. 73.), e il numero delle cifre decimali del quoziente ſarà ſempre additato dalla differenza, che vi ſarà tra il numero di quelle del diviſore, e delle altre del dividendo, compreſovi i zero aggiunti. Per eſempio nel dividere 21.74 per 2.5, ſi ha di quoziente 8.6 coll'avanzo 24. Se ſi vorrà continuare la diviſione ſi aggiugneranno due zero, col mezzo de' quali ſi otterrà il quoziente eſatto 8.696.

78. Finalmente per eſtrarre la radice da un numero, che abbia delle frazioni decimali, fa di meſtiere, che il numero delle cifre, che eſprimono i decimali, ſia pari, allorchè ſi tratta di eſtrarre la radice qua-

quadrata, come 3.52, 156.3841, 17.108453. Se ſi dovrà eſtrarre la radice cubica, le cifre decimali dovranno eſſere tre, o ſei, o nove, o dodeci; ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quarta, il numero delle cifre decimali ſarà quattro, o otto, o dodici; ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quinta, il numero delle cifre decimali ſarà cinque, o dieci, o quindici, e così di altre.

Occorrendo poi, che il numero delle cifre decimali non foſſe tale, baſterà aggiugnervi dei zero per ridurlo al diviſato ſegno; dopo del che ſi ſegneranno i caratteri del numero propoſto da due in due, o da tre in tre, o da cinque in cinque, ſecondo che ſi vorrà eſtrarre la radice quadrata, o la cubica, o la quinta radice, indi ſi opererà a tenore delle regole date.

Affine poi di diſtinguere le cifre decimali nella radice, ſi dirà, che nell' eſtrazione della radice quadrata ogni due cifre decimali nel numero propoſto ne eſigono una nella radice; nell' eſtrazione della radice cubica ogni tre cifre decimali, che s' incontreranno nel numero propoſto, ne eſigono una nella radice. Nell' eſtrarre la radice quinta ſi noterà una cifra decimale in queſta per ogni cinque cifre decimali, che ſaranno nel numero propoſto ec.

CAPO IV.

Del Calcolo delle Quantità irrazionali.

79. Quantità irrazionale, incommenſurabile, o ſorda diceſi quella radice, che non ſi può eſtrarre da una quantità propoſta, come $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{c-m}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{19}$, $\sqrt[3]{27}$ ec. (§. 66.)

Per poter diſcorrere con fondamento del calcolo delle quantità irrazionali, ſi deve in primo luogo ſapere che, ſe ſi moltiplicano due quadrati l' uno per l' altro, ſi produce un quadrato, la cui radice è il prodotto delle loro riſpettive radici, e ſe ſi moltiplicano fra loro due cubi, il prodotto d' eſſi è parimenti un cubo, la cui radice è altresì il prodotto delle loro riſpettive radici; lo ſteſſo ſegue, ſe ſi moltiplicano due quarte, due quinte ec. poteſtà. Per eſempio ſe ſi moltiplicano i due quadrati aa, bb, s' avrà il prodotto $aabb$, che è altresì un quadrato, la cui radice quadrata è ab, cioè il prodotto delle radici a, b dei due quadrati, che ſi ſono moltiplicati: non altrimenti moltiplicandoſi i due cubi a^3, b^3, s' avrà il prodotto $a^3 b^3$, che è altresì un cubo, la cui radice cubica ab è il prodotto delle due radici a, b dei due cubi,

che ſi ſono moltiplicati. Lo ſteſſo ſi proverà delle altre poteſtà.

Della riduzione delle quantità radicali alla più ſemplice eſpreſſione.

80. Si riducono le quantità radicali alla più ſemplice eſpreſſione, qualora la quantità, che è ſotto il ſegno radicale, ſi divide per la maggiore poteſtà, per cui è diviſibile, denominata eſſa poteſtà dall'eſponente del ſegno radicale, laſciando il quoziente ſotto il ſegno, e ponendo la radice della poteſtà fuori di eſſo. Se ſia propoſto di ridurre alla più ſemplice eſpreſſione la quantità $\sqrt{4aab}$, ſi dividerà la quantità $4aab$, che è ſotto il ſegno radicale, per $4aa$, che è il maggior quadrato, per cui è diviſibile la quantità $4aab$; dappoi, laſciando il quoziente b ſotto il ſegno radicale, ſi ſcriverà $2a$, cioè la radice di $4aa$ fuori d'eſſo, e s'avrà $2a\sqrt{b}$, che ſarà la quantità ridotta alla più ſemplice eſpreſſione; imperocchè ſi può conſiderare $4aab$ come il prodotto del quadrato $4aa$ pel quadrato b; ma due quadrati, che ſi moltiplicano, producono un quadrato, la cui radice è uguale al prodotto delle radici quadrate dei quadrati, che ſi ſono moltiplicati; adunque $\sqrt{4aab}$

ſarà uguale al prodotto di $\sqrt{4aa} \times b$; ma perchè $\sqrt{4aa}$ è lo ſteſſo, che $2a$; adunque $\sqrt{4aa} \times \sqrt{b}$, ovvero $\sqrt{4aab}$ ſarà lo ſteſſo, che $2a \times \sqrt{b}$, o ſia $2a\sqrt{b}$.

La quantità $2a$, che ſi trova avanti il ſegno radicale, ſi chiama *coefficiente*.

Per ridurre la quantità $\sqrt[3]{27d^2bc^3}$ alla più ſemplice eſpreſſione, ſi dividerà $27d^2bc^3$ per $27c^3$, che è il maggior cubo, per cui è diviſibile la quantità $27d^2bc^3$; e perchè il quoziente è d^2b, e la radice cubica di $27c^3$ è $3c$, ſarà $3c\sqrt[3]{a^2b}$ la quantità propoſta ridotta alla più ſemplice eſpreſſione; e così ancora $\sqrt{aax-aac}$ ridotta alla più ſemplice eſpreſſione ſarà $a\sqrt{x-c}$. Se s'abbia la quantità $\sqrt[3]{54}$ da ridurſi alla più ſemplice eſpreſſione, ſi dividerà il numero 54, che è ſotto il ſegno, per 27, che è il maggior cubo, per cui è diviſibile il numero 54, e, laſciando il quoziente 2 ſotto il ſegno radicale, ſi ſcriverà fuori d'eſſo il numero 3, che è la radice cubica di 27; ſicchè tale quantità ridotta alla più ſemplice eſpreſſione ſarà $3\sqrt[3]{2}$, e così ancora riducendo $\sqrt{150}$ alla più ſemplice eſpreſſione, s'avrà $5\sqrt{6}$; ſtantechè $\sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6}$.

81. Da ciò, che antecedentemente è ſtato detto, ſi raccoglie che, ſe s'abbia

una qualsivoglia quantità radicale col suo coefficiente, la quale si voglia senza mutare il suo valore trasformare in un'altra, che non abbia coefficiente, si dovrà inalzare il coefficiente alla potestà denominata dal segno radicale, e per tale potestà moltiplicare la quantità, che si trova sotto il segno, indi si lascerà il prodotto sotto lo stesso segno radicale: sicchè $c^2\sqrt{a}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{a\,c^2}$, ed $a\sqrt[3]{x-c}$ sarà lo stesso, che $\sqrt[3]{a^3x-a^3c}$, e $5\sqrt[3]{4}$ sarà lo stesso, che $\sqrt[3]{500}$.

82. Qualsivoglia quantità irrazionale, come $\sqrt{5}$, dicesi incommensurabile in se stessa, perchè nè con numero intero, nè con intero e rotto, nè con rotto si può esprimere il suo valore; ma le quantità $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$ si dicono incommensurabili fra loro.

Lo stesso dire si dee delle quantità $2\sqrt{2}$, $4\sqrt[3]{2}$, perchè di esse non si può esprimere qual parte, o parti l'una sia in comparazione dell'altra. All'opposito si dicono commensurabili fra loro, e comunicanti quelle quantità radicali, delle quali si può esprimere qual parte, o parti l'una sia dell'altra, come $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$, perchè ridotte queste alla più semplice espressione, s'avrà $2\sqrt{2}$, e $4\sqrt{2}$, dove si vede, che la prima $2\sqrt{2}$ è la metà della seconda $4\sqrt{2}$.

Si ſcorge adunque, che le quantità irrazionali ſaranno fra loro comunicanti, allorchè avranno lo ſteſſo ſegno radicale, e ridotte alla più ſemplice eſpreſſione avranno la ſteſſa quantità ſotto il ſegno ſuddetto.

Ridurre le quantità irrazionali alla ſteſſa denominazione.

83. Si riducono le quantità irrazionali alla medeſima denominazione, allorchè due, o più radicali, avendo l'eſponente diverſo, ſi mutano in altri, i quali hanno il medeſimo eſponente ſenza alterarne il valore. Se l' eſponente minore dei ſegni radicali delle quantità propoſte è parte aliquota dell' eſponente maggiore, ſi dividerà l' eſponente maggiore pel minore, ed il quoziente ſarà il numero, che indica a quale poteſtà ſi dovrà inalzare la quantità, che ſi trova ſotto il ſegno dell' eſponente minore, e a tale poteſtà ſi prefiggerà il ſegno radicale coll' eſponente maggiore. Per ridurre le quantità $\sqrt[2]{ac}$, e $\sqrt[6]{cm^3}$ alla medeſima denominazione, ſiccome l'eſponente 2 è parte aliquota dell'eſponente 6, dividaſi l' eſponente 6 per l' eſponente 2, e ſiccome ſi ha 3 di quoziente, s'inalzi la quantità *ac* al cubo, ed al prodotto

$a^3\ c^3$ prefiggasi il segno radicale coll'esponente maggiore 6, s'avrà $\sqrt[6]{a^3\ c^3}$, che sarà lo stesso, che $\sqrt{ac}$; e quindi $\sqrt[6]{a^3\ c^3}$ sarà ridotta alla medesima denominazione di $\sqrt[6]{cm}$ Nella stessa maniera se sieno proposte le quantità $\sqrt{3}$, e $\sqrt[4]{5}$, le quali si debbono ridurre alla medesima denominazione, perchè dividendo l'esponente 8 per l'esponente 2, si ha 4 di quoziente, s'inalzerà il numero 3 alla quarta potestà, e s'avrà 81; sicchè $\sqrt[8]{81}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{3}$, e conseguentemente le quantità proposte ridotte alla medesima denominazione saranno $\sqrt[8]{81}$, e $\sqrt[8]{5}$.

84. Occorrendo, che il radicale, il quale ha il massimo esponente, si possa ridurre a più semplice espressione, in simil riscontro si potrà semplificare l'operazione suddetta. Debbansi ridurre alla stessa denominazione i radicali $\sqrt{3}$, $\sqrt[8]{36}$, siccome $\sqrt[8]{36}$ si può ridurre a più semplice espressione, stantechè la radice ottava di 36 è lo stesso, che la radice quarta di 6; così in vece di $\sqrt[8]{36}$ si potrà scrivere $\sqrt[4]{6}$; adunque riducendo $\sqrt{3}$, e $\sqrt[4]{6}$ alla medesima denominazione col modo precedentemente accennato, si troverà $\sqrt[4]{9}$, e $\sqrt[4]{6}$, che saranno le quantità radicali proposte ridotte alla medesima denominazione, ed

alla minore espressione; e così ancora se si dovranno ridurre alla medesima denominazione i radicali $\sqrt[3]{5}$, e $\sqrt[3]{196}$, siccome quest' ultimo, essendo ridotto a più semplice espressione, è uguale a $\sqrt[3]{14}$, così basterà inalzare $\sqrt[3]{5}$ alla seconda potestà, e s' avrà $\sqrt[3]{25}$; onde i due radicali ridotti alla stessa denominazione saranno $\sqrt[3]{25}$, e $\sqrt[3]{14}$.

Tutte queste operazioni si deducono immediatamente dalla teoria data (§. 15.)

85. Allorchè l' indice minore non è parte aliquota dell' indice maggiore, come per esempio se si dovessero ridurre alla medesima denominazione le quantità $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$; in simil caso convien moltiplicare fra loro gli esponenti 2, 3, 4, e s' avrà 24 di prodotto, che sarà l' esponente comune; ma siccome esse quantità ridotte allo stesso esponente 24 si possono ancora ridurre ad un comune, e minor esponente; così in vece di pigliare esso 24 per esponente comune si piglierà il 12, che è il minor numero, il quale può esser diviso dai numeri 2, 3, 4. Dappoi dicasi, perchè $\sqrt{2}$ è la radice quadrata di 2; sarà pure $\sqrt{2}$ la radice quarta del quadrato di 2, la radice sesta del suo cubo, la radice ottava della sua quarta potestà, la

radice decima della ſua quinta poteſtà, e la radice duodecima della ſua ſeſta (§. 15.); ma perchè inalzando 2 alla ſeſta poteſtà ſi ha 64, così $\sqrt[12]{64}$ ſarà equivalente a $\sqrt{2}$. Non altrimenti, poichè $\sqrt[3]{4}$ è la radice cubica di 4, ſarà altresì la radice ſeſta del quadrato di 4, la radice nona del ſuo cubo, e la radice duodecima della ſua quarta poteſtà; e perchè inalzando 4 alla quarta poteſtà ſi ha 256, così $\sqrt[12]{256}$ ſarà equivalente a $\sqrt[3]{4}$. Collo ſteſſo raziocinio ſi troverà, che $\sqrt[4]{6}$ ſarà equivalente a $\sqrt[12]{216}$; e però le quantità radicali $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$ ridotte alla ſteſſa denominazione ſaranno $\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{216}$.

86. Dal fin quì detto ſi fa chiaro, che per ridurre una qualſivoglia quantità razionale alla medeſima denominazione d'una quantità irrazionale propoſta baſta inalzare la quantità razionale a quella poteſtà indicata dall'eſponente della quantità irrazionale, ed a tale poteſtà prefiggerle il ſegno radicale collo ſteſſo eſponente della quantità irrazionale propoſta; ſicchè, riducendo le quantità a, b^2 alla medeſima denominazione di $\sqrt[4]{c}$, s'avrà $\sqrt[4]{a^4}$, $\sqrt[4]{b^8}$.

Sommare le quantità Radicali.

87. Per ſommare le quantità radicali, ſi devono in primo luogo queſte ridurre alla ſteſſa denominazione, ed indi alla più ſemplice eſpreſſione; ſe accade, che così ridotte ſieno comunicanti, ſe ne ſommeranno gli coefficienti, e la ſomma ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale, e s' avrà la ſomma delle quantità propoſte. Per ſommare i radicali $\sqrt{72}$, $\sqrt[4]{64}$, ſi ridurranno alla medeſima denominazione, e s' avrà $\sqrt{72}$, e $\sqrt{8}$, i quali, eſſendo ridotti alla più ſemplice eſpreſſione, danno $6\sqrt{2}$, e $2\sqrt{2}$. Ora, perchè queſti ſono comunicanti, ſe ne ſommeranno i coefficienti, e la ſomma 8 ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale $\sqrt{2}$; laonde $8\sqrt{2}$ ſarà la ſomma delle quantità propoſte.

88. Se poi le quantità propoſte, eſſendo comunicanti, aveſſero dei coefficienti letterali, come ſono le quantità $a\sqrt{b}$, $+m\sqrt{b}$, $-c\sqrt{b}$, in tale caſo ſi ſcriveranno l' una dopo l' altra, laſciando a ciaſcuna il ſuo riſpettivo ſegno; e così $a\sqrt{b} + m\sqrt{b} - c\sqrt{b}$ rappreſenterà la ſomma delle quantità propoſte, e queſta ſomma ſi può altresì rappreſentare, ſcrivendo $\overline{a+m-c}\sqrt{b}$.

89. Qualora, dopo d' aver fatto le debite riduzioni nelle quantità propoſte, queſte non riſulteranno comunicanti, baſterà ſcriverle una dopo l' altra. Per ſommare $\sqrt{2}$ con $\sqrt[3]{5}$, ſi ſcriverà $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$; per ſommare $4\sqrt{3}$ con $2\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{7}$, ſi ſcriverà $4\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{7}$. Per ſommare $3a\sqrt{c}$ con $-8\sqrt{dm}$, ſi ſcriverà $3a\sqrt{c} - 8\sqrt{dm}$.

Sottrarre le quantità Radicali.

90. Per ſottrarre le quantità radicali ſi ridurranno alla ſteſſa denominazione, ed indi alla più ſemplice eſpreſſione, e ſe, fatte eſſe riduzioni, ſi troveranno comunicanti, ſi ſottrerrà il coefficiente della quantità da ſottrarſi dal coefficiente dell' altra, ed il rimanente ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale. Se ſarà propoſto a ſottrarre la quantità $\sqrt[3]{144}$ dalla quantità $\sqrt{147}$; ſiccome la prima di queſte ſi riduce a $2\sqrt{3}$, e la ſeconda ſi eſprime per $7\sqrt{3}$; così, levando il coefficiente 2 della quantità da ſottrarſi dal coefficiente 7 dell' altra, il rimanente 5 ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale $\sqrt{3}$; onde s' avrà $5\sqrt{3}$ di reſiduo.

Se, dopo d' aver fatto le debite riduzioni, le quantità non riuſciranno comunicanti, allora ſi muterà il ſegno a quella, che ſi deve ſottrarre, e col ſegno mutato ſi ſcriverà preſſo l' altra. Per ſottrarre $\sqrt[3]{2}$ da $\sqrt{80}$ ſi ſcriverà $\sqrt{80} - \sqrt[3]{2}$.

E ſe foſſe propoſto a ſottrarſi la quantità $2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{5}$ dalla quantità $4\sqrt{3} + 6\sqrt[3]{5}$, ſi muteranno i ſegni alla quantità da ſottrarſi $2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{5}$, e coi ſegni mutati ſi ſcriverà l' una dopo l' altra, ſicchè il reſiduo ſarà $4\sqrt{3} + 6\sqrt[3]{5} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{5}$; e perchè $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ è lo ſteſſo, che $2\sqrt{3}$, e $6\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5}$ è lo ſteſſo, che $10\sqrt[3]{5}$, così il reſiduo ricercato, corretta l' eſpreſſione, ſarà $2\sqrt{3} + 10\sqrt[3]{5}$.

Si fa quì oſſervare, che col ſommare, o ſottrarre i radicali, che non ſono comunicanti, ſi vengono a formare quantità compoſte di molti termini, che perciò ſi chiamano moltinomj, ed in iſpezie diceſi *Binomio* quella, che è compoſta di due termini, *Trinomio* quella, che ne contiene tre, e *Quadrinomio* quella, che ne ha quattro, e così ſucceſſivamente.

Della moltiplicazione delle quantità Radicali.

91. Per moltiplicare le quantità radicali non è neceſſario ridurle alla più ſemplice eſpreſſione, ma baſta, che ſieno ridotte alla medeſima denominazione; ciò ſuppoſto, ſe ſi dee moltiplicare una quantità ſemplice per un' altra, ſi moltiplicherà la quantità, che è ſotto il ſegno radicale dell' una, per la quantità, che è ſotto il ſegno radicale dell' altra, ed al prodotto ſi prefiggerà il comune ſegno radicale. Sicchè nel moltiplicare $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$ il prodotto ſarà $\sqrt{ab}$. Imperocchè, ſiccome il prodotto di due quadrati è un quadrato, la cui radice è il prodotto delle radici dei quadrati, che ſi ſono moltiplicati (§.79.), così, eſſendo moltiplicate le quantità, che ſono ſotto i ſegni radicali, cioè le quantità a, b, che ſi conſiderano come quadrati, il prodotto ab ſarà un quadrato, la cui radice quadrata, cioè $\sqrt{ab}$, ſarà il prodotto di $\sqrt{a}$ moltiplicato per $\sqrt{b}$. Allorchè le quantità propoſte hanno dei coefficienti, ſi farà il prodotto delle quantità radicali, ſenza aver alcun riguardo ai coefficienti, indi ſi moltiplicherà il coefficiente dell' una pel coefficiente dell' altra, e

queſto ſecondo prodotto ſarà il coefficiente, che ſi deve prefiggere al primo; e però il prodotto di $a\sqrt[3]{b}$ moltiplicato per $c\sqrt[3]{d}$ ſarà $ac\sqrt[3]{bd}$: il prodotto di $a\sqrt{5c}$ per $a\sqrt{7m}$ ſarà $a^2\sqrt{35cm}$: il prodotto di $3\sqrt{2}$ per $4\sqrt{18}$ ſarà $12\sqrt{36}$; e ſiccome $\sqrt{36}$ è lo ſteſſo, che 6, così tale prodotto ſarà 12×6, o dicaſi 72, la qual coſa fa vedere, che, quantunque le quantità propoſte ſieno irrazionali, talvolta il loro prodotto rieſce razionale.

92. Se ſi dovrà moltiplicare $a^2 + 2\sqrt{b} + \sqrt{3}$ per $3\sqrt{cd} - \sqrt{x}$, ſi ſcriverà una quantità ſotto l'altra, e cominciando a moltiplicare la prima $a^2 + 2\sqrt{b} + \sqrt{3}$ pel termine $3\sqrt{cd}$ della ſeconda, s'avranno i prodotti $3a^2\sqrt{cd} + 6\sqrt{cdb} + 3\sqrt{3cd}$, e di nuovo moltiplicando ciaſcun termine della prima per l'altro termine $-\sqrt{x}$ della ſeconda, s'avranno gli prodotti $-a^2\sqrt{x} - 2\sqrt{bx} - \sqrt{3x}$, e fatta finalmente la ſomma d'eſſi prodotti parziali, s'avrà $3a^2\sqrt{cd} + 6\sqrt{cdb} + 3\sqrt{3cd} - a^2\sqrt{x} - 2\sqrt{bx} - \sqrt{3x}$ pel prodotto ricercato.

Della Diviſione delle quantità Radicali.

93. Per dividere le quantità radicali non è neppure neceſſario, che ſi riducano alla

più ſemplice eſpreſſione, ma baſta, che ſieno ridotte alla medeſima denominazione. Ciò ſuppoſto, ſe ſi dee dividere una quantità radicale ſemplice per un'altra, ſi dividerà la quantità, che è ſotto il ſegno radicale del dividendo per la quantità, che è ſotto il ſegno radicale del diviſore, ed al quoziente ſi prefiggerà il comune ſegno radicale, e occorrendo, che le quantità propoſte abbiano dei coefficienti, ſi dividerà pure il coefficiente del dividendo per quello del diviſore, e queſto quoziente ſarà il coefficiente, che ſi dee prefiggere al primo; ſe ſia propoſto dividere $\sqrt{aab}$ per $\sqrt{ab}$, il quoziente ſarà $\sqrt{a}$, e ſe ſi dee dividere $8\sqrt{aabc}$ per $2\sqrt{ac}$, il quoziente ſarà $4\sqrt{ab}$; così ancora nel dividere $15\sqrt[3]{48ac^2}$ per $5\sqrt[3]{12ac}$, il quoziente è $3\sqrt[3]{4c}$: nel dividere $6a\sqrt{2+b}$ per $3\sqrt{2+b}$, il quoziente è $2a$.

94. Se le quantità propoſte a dividerſi ſaranno compoſte, per eſempio ſe ſi doveſſe dividere $15+6\sqrt{5}-15\sqrt{a}-6\sqrt{5a}$ per $3-3\sqrt{a}$, ſi oſſerverà la medeſima regola, che ſi è tenuto nella diviſione delle quantità razionali (§. 36.):

$$\frac{3-3\sqrt{a}}{5+2\sqrt{5}} \;\Big|\; 15+6\sqrt{5}-15\sqrt{a}-6\sqrt{5a}$$

e però diſpoſte le quantità, come ivi ſi è detto, dicaſi dividendo 15 per 3 ſi ha 5 di quoziente, e moltiplicando il diviſore pel quoziente 5, s'avrà $15 - 15\sqrt{a}$ di prodotto, che ſottratto dalla quantità da dividerſi, s'avrà $+ 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5a}$ di reſiduo. Dappoi dividendo $6\sqrt{5}$ per 3 ſi ha $2\sqrt{5}$ di quoziente, e moltiplicando il diviſore $3 - 3\sqrt{a}$ pel quoziente $2\sqrt{5}$, ſi ha $6\sqrt{5} - 6\sqrt{5a}$ di prodotto, che ſottratto dal reſiduo $6\sqrt{5} - 6\sqrt{5a}$ nulla vi rimane. Perciò ſarà $5 + 2\sqrt{5}$ il quoziente ricerçato.

95. Se ſia propoſto da dividere $\sqrt{a^3+2a^2b+abb} + \sqrt{aab+2abb+bbb}$ per $a+b$; ſi dovrà ridurre $a+b$ alla medeſima denominazione, che hanno i termini delle quantità da dividerſi, e s'avrà $\sqrt{a^2+2ab+bb}$, e diviſo indi il primo termine $\sqrt{a^3+2a^2b+abb}$ del dividendo pel diviſore $\sqrt{a^2+2ab+bb}$, riſulterà il quoziente $\sqrt{a}$; ſi moltiplichi queſto quoziente pel diviſore, e ſe ne ſottri il prodotto, e ſi avrà $\sqrt{aab+2abb+b^3}$ di reſiduo, il quale diviſo per $\sqrt{a^2+2ab+bb}$ darà $\sqrt{b}$ di quoziente; e poichè moltiplicando queſto quoziente pel diviſore, e facendo la debita ſottrazione nulla più rimane, così $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ſarà il quoziente ricercato.

Se

Se ſia propoſta la quantità $9 - a^2 d$ da dividerſi per $3 - a\sqrt{d}$.

$$\begin{array}{l|l} 3 - a\sqrt{d} & 9 - a^2\sqrt{dd} \\ \hline 3 + a\sqrt{d} & 9 - 3a\sqrt{d} \\ \hline & -a^2\sqrt{dd} + 3a\sqrt{d} \end{array}$$

Perchè nella quantità da dividerſi il termine $-a^2 d$ è lo ſteſſo, che $-a^2\sqrt{dd}$, così ſi potrà pigliare $9 - a^2\sqrt{dd}$ per la quantità da dividerſi; e però, dividendo 9 per 3 primo termine del diviſore, ſi ha 3 di quoziente; ſi moltiplichi eſſo quoziente 3 pel diviſore, e ſi ſottri il prodotto $9 - 3a\sqrt{d}$ dal dividendo, e s' avrà di reſiduo $-a^2\sqrt{dd} + 3a\sqrt{d}$; ſe ſi divide il termine $3a\sqrt{d}$ d' eſſo rimanente per 3, ſi trova $a\sqrt{d}$ di quoziente, che moltiplicato pel diviſore, e ſottratto il prodotto $+3a\sqrt{d} - a^2\sqrt{dd}$ dal rimanente $-a^2\sqrt{dd} + 3a\sqrt{d}$, nulla vi rimane; e però $3 + a\sqrt{d}$ ſarà il quoziente della propoſta diviſione.

96. Se poi con tali operazioni non ſi potrà venire a fine della propoſta diviſione, converrà ſcrivere il dividendo per numeratore, ed il diviſore per denominatore d' un rotto, che rappreſenterà il quoziente ricercato (§. 37.)

Occorre talora, che colle precedenti regole non ſi può ſempre ricavare il quo-

ziente ricercato, quantunque per altra ſtrada ſi poſſa rinvenire; ma ſiccome accade rare volte di dover praticare ſomiglianti diviſioni, così ſi tralaſcia di entrare in tali particolarità.

97. Si dee quì oſſervare, che il calcolo degli eſponenti ſomminiſtra altresì un mezzo per moltiplicare, e dividere le quantità radicali di diverſa denominazione; purchè s' incontrino ſotto il ſegno radicale le medeſime lettere: imperocchè, ſe s' abbia per eſempio da moltiplicare la quantità $\sqrt{a}$ per $\sqrt[3]{a^2}$, ſiccome queſte ſi poſſono rappreſentare ſcrivendo $a^{\frac{1}{2}}$ $a^{\frac{2}{3}}$ (§. 20.), così il loro prodotto ſarà $a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$, o ſia $a^{\frac{7}{6}}$, ovvero $\sqrt[6]{a^7}$.

Se ſi dee dividere $\sqrt[3]{c^4}$ per $\sqrt{c}$, o ſia $c^{\frac{4}{3}}$ per $c^{\frac{1}{2}}$, s' avrà di quoziente $c^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}} = c^{\frac{5}{6}}$, ovvero $\sqrt[6]{c^5}$ (§. 21.)

Eſtrarre le radici dalle quantità radicali ſemplici.

98. Non occorre parlare del modo d'inalzare le quantità radicali ad una poteſtà

propoſta; poichè, chiunque avrà ben inteſo il modo di moltiplicarle fra loro, non incontrerà veruna difficoltà per inalzarle a qualunque poteſtà propoſta.

Quanto poi al modo di eſtrarre le radici delle quantità radicali ſemplici, egli è chiaro che, ſe ſi potrà eſtrarre la radice deſiderata dalla quantità, che è ſotto il ſegno radicale, converrà fare tal eſtrazione, ed al riſultamento ſi ſcriverà lo ſteſſo ſegno radicale; così la radice quadrata di $\sqrt[2]{9}$ ſarà $\sqrt[2]{3}$, la radice cubica di $\sqrt{125}$ ſarà $\sqrt{5}$.

Se poi il radicale avrà qualche coefficiente, ſi caverà la radice da eſſo, e queſta ſi prefiggerà al radicale già ritrovato: la radice cubica di $b^6\sqrt{a^3 b^6}$ ſarà $b\sqrt{a b^3}$, la radice quadrata di $b^2\sqrt[3]{a^2 c^2}$ ſarà $b\sqrt[3]{ac}$. Se poi dalla quantità, che è ſotto il ſegno radicale, non ſi potrà eſtrarre la radice ricercata, in tal caſo baſterà moltiplicare l'eſponente del ſegno radicale per l'eſponente della radice ricercata; e così la radice cubica di $\sqrt[2]{18}$ ſarà $\sqrt[6]{18}$ (§. 83.)

Finalmente, ſe non ſi potrà eſtrarre la radice nè dalla quantità, che è ſotto il ſegno, nè dal coefficiente, allora converrà far paſſare il coefficiente ſotto il

ſegno radicale, e moltiplicare l'eſponente del ſegno radicale per l'eſponente della radice ricercata. Se ſia propoſto eſtrarre la radice quadrata dalla quantità $2\sqrt[3]{5}$; ſiccome nè dal coefficiente, nè dalla quantità, che è ſotto il ſegno radicale, ſi può eſtrarre la radice ricercata, così ſi farà paſſare il 2 ſotto il ſegno radicale, e s'avrà $\sqrt[3]{40}$, e moltiplicato l'eſponente 3 del radicale per 2, che è l'eſponente della radice ricercata, s'avrà $\sqrt[6]{40}$ per la radice addimandata.

Siccome per eſtrarre le radici da radicali compoſti ſi richieggono altre cognizioni, così ſe ne parlerà a ſuo luogo.

CAPO V.

Delle Ragioni, e Proporzioni.

99. Euclide nel libro 5. definiſce la ragione matematica in una maniera generale, di modo che ſotto quella definizione ſi comprendono due ſorta di ragioni, cioè l'Aritmetica, e la Geometrica; ma ſiccome egli tratta poi ſolamente della ſeconda, e che ambedue eſſe ragioni ſono di un grande uſo nelle Matematiche, così d'uopo è individuare originalmente la

natura, e le proprietà principali di ciaſcheduna.

Chiamaſi numero *primo* quello, che è miſurato ſolamente dall' unità, come ſono 2, 3, 5, 7, 11, 17, 23 ec., e diceſi *Compoſto* quel numero, che è miſurato da due, o più numeri primi, come ſono 4, 6, 8, 10, 12, 20, 30, 48, 360 ec.

100. Quella quantità, che miſura eſattamente un' altra due, o più volte, diceſi *Parte Aliquota*, e ſi chiama *Parte Aliquanta*, quando non miſura l' altra eſattamente, e così il numero 5 diceſi parte aliquota di 20, di 30, di 70, di 100 ec.; ma chiamaſi parte aliquanta di 21, di 33, di 49, di 112 ec.

101. La ragione matematica è una comparazione, che ſi fa di due quantità omogenee, come ſono due numeri, due linee, due ſuperficie, due durazioni di tempo ec.

La prima quantità, che ſi confronta, chiamaſi *Antecedente*, e ſi dice *Conſeguente* l' altra quantità, alla quale ſi compara la prima. Nel confronto della quantità *m* colla *n* il primo termine *m* ſi chiama antecedente, ed il ſecondo *n* ſi dice conſeguente.

102. Allorchè nel comparare due quantità ſi conſidera l' eccesſo, o il difetto

dell' antecedente al conſeguente, la ragione ſi chiama *Aritmetica*; ma, ſe nel confronto ſi conſidera come l' antecedente contenga, o ſia contenuto dal conſeguente, la ragione ſi chiama *Geometrica*.

103. La differenza tra i due termini di una ragione aritmetica ſi chiama l' *eſponente*, o l' *indice* d' eſſa ragione; e così ſe nel confrontare 4 con 7 ſi conſidera, che il conſeguente 7 ſupera di 3 unità l'antecedente 4, ſi ha la ragione aritmetica, il cui eſponente è 3, e così ancora, ſe nel confrontare 5 con 3 ſi conſidera, che il conſeguente 3 è minore di 2 unità dell' antecedente 5, ſi ha la ragione aritmetica, in cui l'eſponente è 2.

Queſte ragioni ſi ſcrivono col notare un punto tra l' antecedente, ed il conſeguente, come 4. 7, 5. 3.

104. Per avere ſotto l' occhio tutto quanto intereſſa la ragione aritmetica, ſe ne eſprime il conſeguente col mezzo dell' antecedente accreſciuto, o diminuito dell' eſponente, ſecondochè eſſo antecedente è minore, o maggiore del conſeguente; e così la ragione di 4 . 7 ſi ſcrive 4 . 4 + 3, la ragione di 8 . 17 ſi ſcrive 8 . 8 + 9, la ragione di 5 . 3 ſi ſcrive 5 . 5 — 2, la ragione di 13 . 6 ſi ſcrive 13 . 13 — 7,

e generalmente se l' antecedente si chiami $= a$, l' esponente $= d$, il conseguente sarà $a \pm d$; e l' espressione $a : a \pm d$ additerà una ragione aritmetica qualsivoglia, servendo il segno ambiguo $\pm$ per esprimere l' eccesso, o il difetto dell' antecedente verso il conseguente.

105. Nella ragione geometrica il quoziente, che s' ottiene col dividere un termine per l' altro, si chiama l' *Esponente*, o il *Denominatore* della ragione; essendo arbitrario il dividere l'antecedente pel conseguente, o pure il conseguente per l' antecedente, purchè, qualora si hanno due, o più ragioni da trattare, se ne trovi in tutte queste il denominatore nella stessa maniera.

E così, se nel confrontare 4 con 12 si considera, che l'antecedente 4 è contenuto 3 volte nel conseguente 12, si ha una ragione geometrica, il cui denominatore è 3. Se nel confrontare 5 con 11 si considera, che l' antecedente 5 è contenuto 2 volte ed $\frac{1}{5}$ nel conseguente 11; si ha una ragione geometrica, il cui denominatore è $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$, e così ancora se si confronterà 3 con 2, consideran-

do, che il conſeguente 2 è le due terze parti dell' antecedente 3, s' avrà una ragione geometrica, il cui denominatore ſarà $\frac{2}{3}$.

Tutte queſte ragioni ſi ſcrivono col notare due punti tra l'antecedente, ed il conſeguente, come 4 : 12, 5 : 11, 3 : 2.

106. Dalle coſe dette nell' antecedente paragrafo conſegue

1.° Che, ſe nel dividere il termine maggiore pel minore, queſto ſarà parte aliquota dell' altro, il denominatore ſarà ſempre un numero intero; ma, ſe il termine minore ſarà parte aliquanta dell' altro termine, il denominatore riuſcirà un rotto maggiore dell' unità.

2.° Qualora poi ſi divide il termine minore pel maggiore, il denominatore della ragione rieſce per neceſſità un rotto minore dell' unità.

107. Per avere ſotto l' occhio tutto quanto intereſſa la ragione geometrica ſi ſcriveranno il diviſore, ed il denominatore come ſegue.

Se per avere il denominatore ſi dividerà il conſeguente per l' antecedente, la ragione ſi eſprimerà per mezzo dell' antecedente, e del denominatore, e così la ra-

gione di $4 : 12$ ſi ſcriverà $4 : 4 \times 3$, la ragione $5 : 35$ ſi ſcriverà $5 : 5 \times 7$, la ragione $3 : 8$ ſi ſcriverà $3 : 3 \times \frac{8}{3}$, la ragione $9 : 5$ ſi ſcriverà $9 : 9 \times \frac{5}{9}$.

Se per avere il denominatore della ragione ſi dividerà l'antecedente pel conſeguente, ſi ſcriverà per antecedente il conſeguente moltiplicato pel denominatore, e così la ragione di $20 : 5$ ſi ſcriverà $5 \times 4 : 5$, la ragione di $21 : 7$ ſi ſcriverà $7 \times 3 : 7$, la ragione di $11 : 4$ ſi ſcriverà $4 \times \frac{11}{4} : 4$, la ragione di $5 : 8$ ſi ſcriverà $8 \times \frac{5}{8} : 8$, e così di altre.

Generalmente ſia il denominatore $= d$, ſe queſto proviene dal dividere il conſeguente per l'antecedente $= a$, ſi eſprimerà eſſo conſeguente per $a\,d$; onde l'eſpreſſione $a : a\,d$ additerà queſta ragione; ma, ſe il denominatore $= d$ naſce dal dividere l'antecedente pel conſeguente $= c$, la ragione ſi eſprimerà per $c\,d : c$.

108. La ragione geometrica ſi diſtingue in *Razionale*, ed *Irrazionale*, o *Incommenſurabile*. Ha luogo la ragione razionale, ognorachè il ſuo denominatore ſi può eſ-

primere con qualche numero, come 5 : 15, 8 : 4, 3 : 7, 9 : 2, e rieſce irrazionale la ragione, ſempre che il ſuo denominatore non ſi può eſprimere coi numeri, come avviene, allorchè ſi confronta un numero razionale con un radicale, come $3 : \sqrt{5}$, o pure ſi parificano due radicali, che non ſono comunicanti, come $\sqrt{7} : \sqrt[3]{11}$, o finalmente ſi confrontano linee fra loro incommenſurabili, come a dire il lato del quadrato col diametro del medeſimo ec.

Delle Proporzioni Aritmètiche.

109. Il confronto, che ſi fa di due ragioni aritmetiche uguali, coſtituiſce una proporzione aritmetica. Se ſi confronteranno le due ragioni uguali 5 . 8, 14 . 17, e ſi ſepareranno col mezzo di due punti, s'avrà la proporzione aritmetica 5 . 8 : 14 . 17.

Si praticherà pure la detta ſeparazione col mezzo dei due punti, allorchè le due ragioni uguali ſi ſcriveranno in queſt'altra maniera (§. 104.) $5 . 5 + 3 : 14 . 14 + 3$.

Se l'antecedente della prima ragione ſi chiami $= a$, quello della ſeconda ragione $= A$, e l'eſponente comune $= d$, l'eſpreſſione $a . a \pm d : A . A \pm d$ ſarà generaliſſima per qualſivoglia proporzione

aritmetica; purchè s' abbia l' avvertenza di pigliare in ambedue i conſeguenti il ſegno poſitivo, o pure negativo.

110. La proporzione aritmetica diceſi *Diſcreta*, allorchè la differenza tra il primo conſeguente, ed il ſecondo antecedente è diverſa dall' eſponente comune alle due ragioni; e così ſi dirà diſcreta la proporzione 7 . 9 : 14 . 16, ſtante che la differenza 5 tra 9, e 14 è diverſa dall' eſponente 2 delle due ragioni.

111. Chiamaſi *Continua* la proporzione aritmetica, allorchè la differenza tra il primo conſeguente, ed il ſecondo antecedente è uguale all' eſponente delle due ragioni; e così ſi dirà continua queſta proporzione 9 . 13 : 17 . 21, perchè la differenza 4 tra 13, e 17 è uguale all'eſponente delle due ragioni.

In queſto caſo il conſeguente della prima ragione ſi può far ſervire di antecedente pel primo termine della ſeconda ragione, il che ſomminiſtra poi tre ragioni uguali, cioè 9 . 13, 13 . 17, 17 . 21. Queſta maniera di parificare le quantità ſomminiſtra il mezzo di avere una proporzione continua con tre ſoli termini, come 6 . 9 . 12, 13 . 17 . 21, giacchè con queſti ſi hanno tutt' ora due ragioni uguali,

il cui termine di mezzo ſi chiama *medio proporzionale aritmetico.*

112. Le proporzioni continue ſi ſcrivono anche col notare a ſiniſtra due punti intercetti da una linea, e ſi diſtinguono in *Aſcendenti*, o *Creſcenti*, e *Diſcendenti*, o *Decreſcenti*, come ſi oſſerva ne' ſeguenti eſempi

$\div$ 3 . 5 . 7 . 9
$\div$ 8 . 15 . 22 . 29
$\div$ 11 . 8 . 5 . 2
$\div$ 16 . 11 . 6 . 1

ne' quali le due prime ſono aſcendenti, e diſcendenti le due ultime.

113. Conſiderando più particolarmente gli eſempi addotti nell' antecedente paragrafo, ſi vede facilmente, che nella proporzione continua il ſecondo termine uguaglia il primo più, o meno l' eſponente, che il terzo termine uguaglia il primo più, o meno il doppio dell' eſponente, e che il quarto termine uguaglia il primo più, o meno il triplo dell' eſponente; e però chiamando il primo termine $= p$, l' eſponente $= d$, s' avrà la ſeguente proporzione continua eſpreſſa in una maniera generaliſſima.

$\div p . p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d$

114. Una breve riflеſſione fatta intorno

l'addotta eſpreſſione generale (§. 113.) baſta per dedurne le due ſeguenti conſeguenze.

1.ª Nella proporzione continua di quattro termini la ſomma dei due eſtremi uguaglia quella dei due di mezzo, giacchè ciaſcheduna è eſpreſſa per $2p \pm 3d$.

2.ª Se la proporzione continua ha tre ſoli termini, la ſomma dei due eſtremi uguaglia il doppio di quello di mezzo. Per eſempio ſe ſi pigliano i tre primi termini $\div p . p \pm d . p \pm 2d$, ſi ha $2p \pm 2d$ per la ſomma del primo, e terzo, la quale equivale il doppio del termine di mezzo $p \pm d$; e ſe ſi pigliano i tre ultimi termini $\div p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d$, la ſomma $2p \pm 4d$ dei due eſtremi è pure doppia del termine di mezzo $p \pm 2d$.

115. In qualſivoglia proporzione aritmetica diſcreta la ſomma dei due eſtremi uguaglia quella dei due di mezzo.

Sia il primo antecedente $= a$, il ſecondo $= A$, l'eſponente comune $= d$ ſarà

$a . a \pm d : A . A \pm d$, e facendo la ſomma de' medj, e degli eſtremi, s'avrà

$a + A \pm d = a \pm d + A$.

116. La proporzione geometrica conſiſte nel confronto, che ſi fa di due ragioni geometriche uguali, cioè che hanno lo ſteſſo denominatore. Se ſi confronteranno le due ragioni uguali 2 : 6 , 5 : 15 , e ſi ſepareranno col mezzo di quattro punti, s'avrà la proporzione geometrica 2 : 6 :: 5 : 15.

La ſteſſa ſeparazione ſi farà pure, allorchè le due ragioni uguali ſi ſcriveranno in queſt' altra maniera (§. 107.)

2 : 2 X 3 :: 5 : 5 X 3.

Generalmente ſe il denominatore = *d* della ragione ſi otterrà col dividere l'antecedente pel conſeguente, e ſia il primo conſeguente = *c*, il ſecondo = *C*, s' avrà la proporzione

c d : *c* :: *C d* : *C*,

e ſe il denominatore s'otterrà col dividere il conſeguente per l' antecedente, e ſi chiami il primo antecedente = *a*, il ſecondo = *A*, s' avrà la proporzione

a : *a d* :: *A* : *A d*.

117. La proporzione geometrica ſi diſtingue pure in *Diſcreta*, e *Continua*.

Si chiama diſcreta, allorchè, confrontando il primo conſeguente col ſecondo antecedente, ſi ha un quoziente diverſo

dal denominatore delle due ragioni uguali, che coſtituiſcono la proporzione. Per eſempio ſe nella proporzione

2 : 6 :: 5 : 15

ſi divide il ſecondo antecedente 5 pel primo conſeguente 6, ſi ha $\frac{5}{6}$ di quoziente, numero aſſai diverſo dal denominatore 3, che s' ottiene col dividere un conſeguente pel ſuo antecedente.

118. Si dice continua la proporzione geometrica, allorchè nel confronto del primo conſeguente col ſecondo antecedente s'ottiene un quoziente uguale al denominatore delle due ragioni. La proporzione 4 : 8 :: 16 : 32 ſi dirà continua, giacchè, dividendo 16 per 8, ſi ha il quoziente 2, che è uguale al denominatore delle due ragioni; e così ancora ſarà continua la proporzione 108 : 36 :: 12 : 4, giacchè, dividendo 36 per 12, ſi ha il quoziente 3, che è uguale al denominatore delle due ragioni.

119. Nella proporzione geometrica continua il conſeguente della prima ragione ſi può far ſervire d' antecedente al primo termine della ſeconda ragione, la qual coſa ſomminiſtra poi tre ragioni uguali, quantunque la proporzione abbia quattro

ſoli termini; e così nella proporzione continua 8 : 12 : : 18 : 27 ſi hanno le tre ragioni uguali 8 : 12, 12 : 18, 18 : 27.

Queſta maniera di confrontare le quantità ſomminiſtra il mezzo di avere una proporzione continua con tre ſoli termini, giacchè con eſſi ſi hanno tutt' ora due ragioni uguali, come oſſervaſi nel ſeguente eſempio 8 : 12 : 18, il cui termine di mezzo ſi chiama *Medio proporzionale geometrico.*

120. Le proporzioni continue geometriche ſi ſcrivono anche con quattro punti a ſiniſtra ſeparati da una linea, come ne' ſeguenti eſempj.

$\div\!\!\div$ 3 : 12 : 48 : 192

$\div\!\!\div$ 128 : 64 : 32 : 16

La prima di queſte proporzioni ſi chiama *Aſcendente*, o *Creſcente*, e la ſeconda ſi chiama *Decreſcente*, o *Diſcendente.*

121. Se i termini della proporzione aſcendente $\div\!\!\div$ 3 : 12 : 48 : 192 ſi ſcriveranno a norma del §. 107, s' avrà $\div\!\!\div$ 3 : 3 X 4 : 3 X 4 X 4 : 3 X 4 X 4 X 4, nella quale eſpreſſione s' oſſerva, che il ſecondo termine è il prodotto del primo nel denominatore, che il terzo termine è il prodotto del primo nel quadrato del denominatore, e che il quarto termine è il

prodotto

prodotto del primo nel cubo del denominatore.

La medeſima coſa s'oſſerverà pure, ſe i termini della proporzione diſcendente $\div\div 128 : 64 : 32 : 16$ ſi ſcriveranno a norma del detto §. 107, e che per avere il denominatore $= \frac{1}{2}$ ſi dividerà il conſeguente per l'antecedente, poichè la proporzione ſuddetta ſarà eſpreſſa in queſt'altra maniera

$\div\div 128 : 128 \times \frac{1}{2} : 128 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} : 128 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

Per la qual coſa, ſe il primo termine ſi chiami $= p$, il denominatore $= d$, l'eſpreſſione $\div\div p : pd : pd^2 : pd^3$ ſarà generaliſſima, vale a dire che ſervirà indiſtintamente per qualſivoglia proporzione continua creſcente, e decreſcente.

122. In qualſivoglia proporzione geometrica il prodotto dei termini eſtremi è uguale a quello, che ſi fa dai due di mezzo.

Abbiaſi in primo luogo la proporzione diſcreta (§. 116.) $a : ad :: A : Ad$, ſe ſi moltiplicano i due eſtremi a, Ad tra di loro, e ſi fà lo ſteſſo coi due termini di mezzo ad, A, ſi ha $a \times Ad = ad \times A$.

Abbiaſi in ſecondo luogo la proporzione continua (§. 121.) $\div\div p : pd : pd^2 : pd^3$, ſe ſi moltiplicano i due eſtremi p, pd^3, ſi

ha $p^2\ d^2$ uguale al prodotto dei due termini di mezzo pd, pd^2.

123. Dall' antecedente teorema conſegue, che qualſivoglia equazione ſi può ſempre convertire in una proporzione geometrica col far ſervire per eſtremi i due fattori, che ſono da una banda del ſegno d' uguaglianza, e ſcrivendo per termini di mezzo gli altri due fattori; e così l'equazione $pm = qn$ ſi potrà convertire in queſta proporzione $p : q :: n : m$; l' equazione $ac - af = K^2 - m^2$ ſi potrà convertire in queſta proporzione

$$a : K + m :: K - m : c - f$$

e così di altre.

124. Per mezzo delle eſpreſſioni (§.122.) della proporzione diſcreta, e della continua ſi poſſono anche dimoſtrare con tutta facilità le diverſe maniere di ragionare eſpreſſe nel libro quinto d' Euclide, per eſempio ſe ſia

$$a : ad :: A : Ad$$

ſarà Permutando $a : A :: ad : Ad$

Invertendo $ad : a :: Ad : A$

Componendo $a + ad : ad :: A + Ad : Ad$

Dividendo $a - ad : ad :: A - Ad : Ad$

Per converſion di ragione $a : a - ad :: A : A - Ad$ imperciocchè in tutte queſte maniere di argomentare ſi trova ſempre, che il pro-

dotto degli eſtremi uguaglia quello dei due termini di mezzo.

125. Nella proporzione continua di tre termini il prodotto degli eſtremi è uguale al quadrato del termine di mezzo.

Se nella proporzione continua $\div\div p : pd : pd^2 : pd^3$ (§. 122.) ſi prenderanno i tre primi termini $\div\div p : pd : pd^2$, s' avrà $p^2 d^2$ pel prodotto del primo nel terzo termine, e queſto prodotto ſi ſcorge facilmente eſſere uguale al quadrato, che ſi fa dal termine di mezzo pd.

Lo ſteſſo ſuccede, qualora ſi prendono i tre ultimi termini $\div\div pd : pd^2 : pd^3$; vedendoſi chiaramente, che il prodotto $p^2 d^4$ del primo pd nell'ultimo termine pd^3 uguaglia preciſamente il quadrato, che ſi fa dal termine di mezzo pd^2.

126. Nella proporzione continua $\div\div p : pd : pd^2 : pd^3$ il primo termine ſtà al terzo, come il quadrato del primo ſtà al quadrato del ſecondo;
cioè $p : pd^2 :: p^2 : p^2 d^2$. Per conoſcere la verità di queſto teorema baſta oſſervare, che il prodotto de' medj uguaglia quello degli eſtremi.

127. Nella proporzione continua il primo termine ſtà al quarto, come il cubo del primo ſtà al cubo del ſecondo, cioè
$p : pd^3 :: p^3 : p^3 d^3$

Se ſi farà il prodotto dei medj, e degli eſtremi, ſi troverà, ch'eſſi ſono uguali, e con ciò ſarà provata la verità della propoſizione.

Delle Ragioni Geometriche compoſte.

128. Se ſi hanno due, o più ragioni geometriche, e, dopo d'aver moltiplicato tra di loro gli antecedenti, e indi i conſeguenti tra di loro, ſe ne confrontano i prodotti, la ragione, che riſulta da queſto confronto, ſi dice *Compoſta*, il cui denominatore è uguale al prodotto, che naſce dal moltiplicare tra di loro i denominatori delle ragioni componenti.

Abbianſi le due ragioni 4 : 8, 5 : 15, i cui denominatori ſono 2, e 3, col moltiplicare tra di loro i due antecedenti 4, e 5, ed i conſeguenti 8, e 15, ſi ha la ragione compoſta 20 : 120, il cui denominatore 6 è il prodotto di 2 per 3; e così ancora ſe ſi hanno le tre ragioni ſemplici 3 : 12, 2 : 10, 8 : 7, i cui denominatori ſono 4, 5, $\frac{7}{8}$, la ragione compoſta 48 : 840, che naſce dal moltiplicare come ſovra gli antecedenti, ed i conſeguenti, ha per denominatore $\frac{35}{2}$, che è il

prodotto dei tre denominatori ſemplici $4, 5, \frac{7}{8}$.

Generalmente ſe s'abbiano le ragioni $a : ad$, $f : fg$, $m : mK$, i cui denominatori ſono d, g, K, s'avrà colla moltiplicazione la ragione compoſta $afm : adfgmK$, il cui denominatore è dgK.

129. Importa quì avvertire che, qualora i due termini di una ragione ſono numeri compoſti, i quali hanno una miſura comune oltre l'unità, la ragione ſi potrà ridurre a numeri minori col dividerne i termini per la miſura comune.

Per eſempio i termini della ragione di 3 : 12, avendo il 3 per comune miſura, ſi ridurrà a numeri minori col dividere ciaſcun termine per 3, e s'avrà la ragione 1 : 4, che è uguale alla prima, così ancora nella ragione 5 : 30, avendo i due termini il numero 5 per comune miſura, ſi ridurrà colla diviſione a queſt'altra 1 : 6. Nella ragione di 21 : 56, avendo i due termini il numero 7 per comune miſura, ſi ridurrà colla diviſione a queſt'altra 3 : 8. I termini della ragione 42 : 160, avendo il 2 per comune miſura, ſi ridurrà eſſa ragione a queſt' altra 21 : 80, la quale più non ſi potrà ridurre, non oſtante che i

ſuoi termini ſieno numeri compoſti, giacchè non v'è tra eſſi altra miſura comune fuorchè l'unità.

130. Poichè il denominatore di una ragione compoſta è prodotto dalla moltiplica dei denominatori delle ragioni componenti, conſegue che, ſe queſte ragioni ſaranno uguali, vale a dire che avranno lo ſteſſo denominatore, la ragione compoſta avrà un denominatore, che ſarà il denominatore di una delle componenti elevato a una poteſtà indicata dal numero d'eſſe ragioni componenti; così che, ſe le ragioni componenti ſaranno due, il denominatore della ragione compoſta ſarà eſpreſſo da uno de' denominatori ſemplici elevato al quadrato; ſe le ragioni componenti ſaranno tre, il denominatore ſemplice elevato al cubo ſarà quello, che s'appartiene alla ragione compoſta, e generalmente ſe il denominatore delle ragioni uguali componenti ſi chiami $= d$, e ſia $= n$ il numero di queſte ragioni, il denominatore della ragione compoſta ſarà d^n.

Per eſempio abbianſi le ragioni uguali 2 : 8, 5 : 20, il cui denominatore è 4, il denominatore della ragione compoſta 2 X 5 : 8 X 20, o ſia 10 : 160 viene eſpreſ-

ſo da 16, che è il quadrato del denominatore ſemplice 4. Se ſi hanno tre ragioni uguali 2 : 8, 5 : 20, 3 : 12, il denominatore della ragione compoſta 2 X 5 X 3 : 8 X 20 X 12 viene eſpreſſo da 64, che è il cubo di 4, e così di altre.

131. Per eſaminare queſta teoria ſotto un altro punto di viſta, ſi pigli la proporzione continua (§. 122.) $\div\!\!\div p : pd : pd^2 : pd^3$, e ſe ne conſiderino ſolamente tre termini, e per eſempio i tre primi $\div\!\!\div p : pd : pd^2$, ſi vede facilmente, che la ragione del primo al terzo termine è compoſta di due ragioni ſemplici, le quali hanno il denominatore $= d$, cioè della ragione del primo al ſecondo termine, e di quella del ſecondo al terzo, e che la ragione compoſta del primo al terzo ha per denominatore d^2, cioè il quadrato di d; la medeſima coſa ſi oſſerva nell' eſaminare i tre termini $\div\!\!\div pd : pd^2 : pd^3$.

Queſta propoſizione ſi eſprime anche in queſta maniera. Se tre grandezze ſono in continua proporzione geometrica, la ragione della prima alla terza grandezza è duplicata di quella, che ha la prima alla ſeconda, vale a dire che il denominatore della ragione compoſta naſce dal denominatore della ragione ſem-

plice moltiplicato una volta in ſe medeſimo.

132. Se della proporzione continua $\div\div p : pd : pd^2 : pd^3$ ſe ne conſiderano i quattro termini, ſi vede, che la ragione del primo al quarto è compoſta di tre ragioni uguali, cioè di quella del primo al ſecondo termine, del ſecondo al terzo, e del terzo al quarto, e che il denominatore d^3 di queſta ragione compoſta è il cubo del denominatore $= d$ delle ragioni componenti. Queſta propoſizione ſi eſprime anche in queſt'altra maniera. Se quattro grandezze ſono in continua proporzione geometrica, la ragione della prima alla quarta è triplicata di quella, che ha la prima alla ſeconda, vale a dire che il denominatore della ragion compoſta naſce dal denominatore della ragione ſemplice moltiplicato due volte in ſe medeſimo.

PARTE SECONDA

Delle maniere di risolvere i Problemi Matematici usando il metodo Analitico.

133. Due sono i metodi, coi quali si risolvono le questioni, ed i problemi, cioè *Sintetico*, o dicasi *Metodo di Composizione*, ed *Analitico*, o sia *Metodo di Risoluzione.*

Si usa il metodo sintetico, allorchè, scelti alcuni principj, si combinano in modo, che s' arriva gradatamente a conoscere ciò, che si cerca. Di questo metodo si acquista una idea chiara, e distinta, considerando i problemi risolti negli elementi d' Euclide, e nella Geometria pratica. L' Artefice, che combina insieme le diverse parti di un oriuolo, e le aggiusta in modo, che la macchina segna le ore con precisione, usa pure il metodo sintetico in questo suo operato.

Si pratica poi il metodo Analitico, ognorachè, supponendo fatta la cosa, che si cerca di conoscere, si passa a discomporla nelle sue parti costitutive per osservare come ognuna di esse contribuisca all' esistenza, ed alla perfezione della

cosa medesima. L' Artefice, che discompone un oriuolo per conoscerne l'interna struttura, e le funzioni di ciascheduna parte, usa il metodo analitico in questo suo procedimento.

Il metodo sintetico si chiama altresì *Metodo di dottrina*, stantechè è il più proprio per imparare qualsivoglia scienza, e per insegnarla. Il metodo analitico si chiama anche *Metodo d' Invenzione*, avvegnachè serve a scoprire con gran facilità le verità nascoste.

CAPO I.

Regole ed Indirizzi generali per risolvere i Problemi Matematici col metodo analitico.

134. I problemi matematici sono di tre specie, cioè *Indeterminati*, *Determinati*, e *Più che determinati*, e si cerca in ciascheduno di essi una, o più cose.

I problemi indeterminati sono scarsi di condizioni, e di dati, motivo, per cui hanno un numero infinito di soluzioni; per esempio dividere un proposto numero in due parti disuguali, descrivere una figura quadrilatera, un cerchio ec.

Un problema indeterminato può eſſerlo più, o meno, ſecondo che minore, o maggiore è il numero delle condizioni, colle quali vien propoſto e vincolato; da quì avviene poi, che il numero delle ſue ſoluzioni ſminuiſce a miſura, che creſce quello delle condizioni. Per eſempio deſcrivere un triangolo è un problema indeterminatiſſimo, ſe ſi aggiugnerà la condizione, che il triangolo debba eſſere coſtrutto ſopra una data retta, rimarrà bensì tutt' ora indeterminato il problema, ma lo ſarà però meno del primo: che ſe vi ſi aggiugnerà un' altra condizione, e per eſempio che il triangolo da deſcriverſi ſopra la data retta debba eſſere iſoſcele, il problema ſarà ancora indeterminato, ma meno ancora dei due primi, e il numero delle ſue ſoluzioni, quantunque infinito, ſarà però minore di quello del ſecondo problema, e minore aſſai più di quello del primo.

I problemi indeterminati numerici ſono di pochiſſima utilità, motivo, per cui ſi tralaſcia di parlarne maggiormente in queſti elementi; ma i problemi indeterminati geometrici ſono di un grandiſſimo uſo, onde ſe ne tratta diffuſamente nei principj delle Matematiche ſublimi.

135. I problemi determinati ſono quelli, che hanno tutte le condizioni neceſſarie per arrivare a conoſcere con preciſione ciò, che ſi ricerca, ragione, per cui il numero delle ſue ſoluzioni è limitatiſſimo: per eſempio trovare due numeri tali, che uno ſia doppio dell' altro, e la loro ſomma ſiá 9. Siccome due ſoli ſono i numeri, cioè 6, e 3, i quali ſoddisfanno alle due condizioni del propoſto problema, così una ſola è la ſua ſoluzione. Lo ſteſſo dire ſi dovrà de' ſeguenti problemi geometrici determinati. Sopra una data retta terminata deſcrivere un triangolo equilatere. Deſcrivere un cerchio, il cui raggio ſia uguale alla data retta. A tre rette date trovare una quarta proporzionale ec.

Dalle coſe dette nel precedente paragrafo ſi ſcorge facilmente, che coll' accreſcere le condizioni in un problema indeterminato s' arriva a renderlo determinato, o pure, ciò, che è lo ſteſſo, qualſivoglia problema determinato viene compoſto da due, o più problemi indeterminati; per eſempio il problema determinato, in cui ſi preſcrive di deſcrivere ſopra una data retta preſa per ipotenuſa un triangolo iſoſcele rettangolo, è compoſto dai due ſeguenti problemi indeterminati,

cioè ſopra la data retta preſa per baſe deſcrivere un triangolo iſoſcele. Sopra la data retta preſa per ipotenuſa deſcrivere un triangolo rettangolo.

136. I problemi più che determinati ſono quelli, che oltre le condizioni neceſſarie per riſolverli ne contengono delle altre, che ſono ſuperflue, o che rendono il problema impoſſibile a riſolverſi. Per eſempio dividere 35 per 7 in modo, che il quoziente ſia 5; queſto problema più che determinato ha l'ultima condizione affatto ſuperflua, mentre che, dividendo 35 per 7, il quoziente non può eſſere altro, che 5. Se poi ſi voleſſe, che col dividere 35 per 7 il quoziente foſſe 6, allora il problema più che determinato riuſcirebbe impoſſibile per cauſa dell'ultima condizione. Se verrà propoſto di deſcrivere col dato raggio un cerchio, che abbia il diametro doppio d'eſſo raggio, il problema più che determinato avrà una condizione ſuperflua; ma ſe ſi vorrà, che il diametro ſia maggiore, o minore del doppio della data retta, che ſerve di raggio, il problema più che determinato più non ſi potrà riſolvere.

Da quanto ſovra è ſtato detto chiaramente ſi vede, che i problemi più che

determinati ſono vizioſi, e che, venendo propoſti, o ſi debbono rigettare, o ſi debbono ſpogliare delle condizioni ſuperflue, e renderli in tal guiſa determinati.

137. Il metodo Analitico, con cui i Matematici riſolvono i loro problemi, conſiſte principalmente nell'artifizio delle equazioni, e per praticarlo convien valerſi delle ſeguenti regole, ed indirizzi generali.

1.° Si procurerà prima d' ogni coſa di comprendere chiaramente lo ſtato della queſtione, che ſi fa nel problema.

2.° Si diſtenderà un canone, o ſia regiſtro, in cui i dati del problema, o dicaſi le quantità cognite ſi individueranno colle prime lettere dell' alfabeto, o coi numeri, e le quantità incognite, che ſi ricercano, ſi eſprimeranno colle ultime lettere.

3.° Si pareggeranno le quantità cognite colle incognite in diverſe maniere, finchè rieſca di eſprimere le condizioni del problema con altrettante equazioni, quante ſono le incognite. Queſte equazioni ſi chiamano *Primitive*.

4.° Tutte le equazioni primitive del problema ſi ridurranno in altre *Derivative*, e queſte in una ſola, la quale, perchè rinchiude tutte le condizioni del problema,

Equazione Definitiva, o *Finale* si chiama, e contiene una sola incognita.

5.° Si maneggerà l'equazione finale in modo, che si trovi il valore dell'incognita.

Come s' arrivi a comprendere chiaramente lo stato della questione.

138. Si giugne a comprendere chiaramente lo stato della questione col considerare attentamente tutte le condizioni poste nel problema, e col distinguere le relazioni, che aver debbono le quantità cognite colle incognite. Dopo che si è ben intesa la questione, e che si hanno presenti tutte le condizioni, e le relazioni suddette, si distende poi il canone (§. 137. n. 2.), additando in esso le quantità con precisione, e colla maggiore semplicità possibile nel modo, che segue.

Distendere il canone, o sia denominare le quantità cognite, e le incognite, e registrarle.

139. Siccome fralle quantità de' problemi proposti altre sono cognite, o date, ed altre incognite, o ricercate, così per facilmente distinguere le une dalle altre, si

ſogliono le prime denominare colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c ec., o pure coi numeri, e le ſeconde colle ultime lettere x, y, z ec.

Per eſempio ſe ſia propoſto di trovare due numeri, la ſomma de' quali ſia 100, e la differenza 10,

Canone.

Somma 100. . . = a
Differenza 10. . = c
Numero maggiore = x
Numero minore . = y

ſi denominerà ciaſcheduna delle quantità date 100, e 10 con una delle prime lettere dell' alfabeto, cioè ſi potrà ſupporre la ſomma 100 = a, e la differenza 10 = c; indi ciaſcuna delle quantità incognite da ritrovarſi ſi denominerà con una delle ultime lettere, additando per eſempio il maggiore numero colla lettera x, ed il minore colla lettera y.

140. Occorre alle volte, che le quantità da regiſtrarſi nel canone ſi poſſono individuare in una maniera più ſemplice, la qual coſa ſi dee praticare, finchè ſi può, avvegnachè facilita il calcolo, che

in

in ſeguito ſi dee poi fare per trovare il valore dell' incognita. Per eſempio nell' antecedente problema, eſſendoſi rappreſentato il numero maggiore per x, il minore ſi potrà rappreſentare per $x - c$, ovvero per $a - x$; imperciocchè, eſſendo c la differenza, con cui il maggiore ſupera il minore, levando la differenza c dal maggiore x, il rimanente $x - c$ ſarà il minore: e perchè la ſomma dei due numeri è eſpreſſa per a, ſe da tale ſomma ſi leverà il numero maggiore x, il rimanente $a - x$ rappreſenterà altresì il minore.

Così ancora, ſe ſi dovrà trovare due quantità, la maggiore delle quali ſia tripla dell' altra, ſe la minore ſi additerà per x, ſarà più ſpediente rappreſentare la maggiore per $3x$, in vece di eſprimerla per y, o per z.

Eſprimere colle equazioni le condizioni poſte nel problema.

141. Denominate le quantità cognite, e le incognite nel modo, che precedentemente è ſtato inſegnato, ſi dovrà eſprimere con una equazione primitiva ciaſcheduna condizione poſta nel problema, formando in tal guiſa tante equazioni, quan-

te ſono le condizioni ſuddette. Per eſempio volendo eſprimere colle equazioni le condizioni del problema (§. 139.), in cui ſi ricercano due numeri, la ſomma de' quali ſia $100 = a$, e la differenza $10 = c$, ed eſſendoſi regiſtrato nel canone x pel numero maggiore, e y pel minore, ſiccome i due numeri da ritrovarſi inſieme preſi ſono $= a$, così s'avrà l'equazione primitiva $x + y = a$; e poichè a tenore della ſeconda condizione il maggiore x ſupera il minore y per la quantità $= c$, così s' avrà la ſeconda equazione primitiva $x = y + c$. Pertanto a tenore delle due condizioni poſte nel problema ſi ſono formate le due equazioni primitive $x + y = a$, $x = y + c$.

142. Se ſia propoſto il ſeguente problema. La paga giornaliera del Generale colla doppia paga del Colonnello fanno ll. 28. Il triplo della paga del Generale meno il quadruplo della paga del Maggiore fanno ll. 16. La metà della paga del Colonnello unita alla paga del Maggiore ſono lire 9. Cercaſi la paga di ciaſcheduno di queſti Uffiziali. Se nel fare il canone ſi chiamino le paghe incognite

del Generale $= x$
del Colonnello $= y$
del Maggiore $= z$
le lire 28 $= a$
16 $= b$
9 $= c$

Nell'adempiere la prima condizione del problema, s'avrà l'equazione $x + 2y = a$. Coll' adempiere la ſeconda condizione del problema s'avrà l'altra equazione $3x - 4z = b$, e finalmente coll'adempiere la terza condizione s'otterrà l'equazione $\frac{y}{2} + z = c$; col qual mezzo ſi ſaranno eſpreſſe le tre condizioni del problema colle tre equazioni primitive

1.ª $x + 2y = a$
2.da $3x - 4z = b$
3.ª $\frac{y}{2} + z = c$

143. Occorre talvolta, che dall'eſpoſto nel problema non riſulta chiaramente come ſe ne poſſano eſprimere le condizioni colle equazioni. In ſimili riſcontri d' uopo è raccorrere alle proprietà delle grandezze, che già ſono note, affine di cercare ſe per mezzo di qualcheduna di queſte proprietà ſi può formare una equazione, che comprenda la condizione neceſſaria. Per eſempio eſſendo dati i numeri 8, e

12, trovare ad essi un terzo, ed un quarto proporzionale.

Si distenda il canone, e si chiami il terzo proporzionale incognito $= x$, ed il quarto proporzionale $= y$, il primo numero dato $8 = a$, il secondo $12 = c$; siccome dalla prima condizione del problema non risulta il modo di esprimerla con una equazione, così fa di mestiere ricordarsi delle cose già insegnate intorno le proprietà delle grandezze, cioè che, se tre grandezze sono proporzionali, il prodotto della prima nella terza è uguale al quadrato di quella di mezzo (§. 125.); e però sia $a : c :: c : x$, s' avrà per la prima condizione $a\,x = c^2$.

Col ricordarsi pure che, se quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto dei due termini estremi è uguale al prodotto di quelli di mezzo (§. 122.), si dirà $a : c :: x : y$, e quindi s' esprimerà la seconda condizione del problema con quest' altra equazione $c\,x = a\,y$. Si avranno pertanto le due condizioni del problema espresse colle due equazioni primitive

$$1.^a \quad a\,x = c^2$$
$$2.^a \quad c\,x = a\,y$$

144. Altre volte poi si adempiscono alcune condizioni del problema col disten-

dere il canone con discernimento tale, che si schiva di accrescere il numero delle incognite (§. 140.), la qual cosa si farà osservare in varj riscontri, affinchè si pratichi poi in que' casi, che ne saranno suscettibili.

Ridurre tutte le equazioni primitive del problema alla equazione finale.

145. Per ridurre tutte le equazioni primitive del problema alla finale, convien valersi di uno, o più de' seguenti assiomi, affine di fare sparire, o dicasi esterminare le diverse incognite, e ridurle a una sola.

1.° Se due quantità sono uguali ad una terza, esse saranno uguali fra loro.

2.do Se a quantità uguali s'aggiugneranno, o da esse si leveranno quantità uguali, le somme, od i rimanenti saranno uguali.

3.° Se due quantità uguali si moltiplicheranno, o si divideranno per la stessa quantità, o per quantità uguali, i prodotti, od i quozienti saranno uguali.

4.° Se da quantità uguali si caveranno radici d'indice uguale, esse radici saranno uguali.

5.° Se quantità uguali s'eleveranno a potestà d'esponenti uguali, esse potestà saranno uguali.

6.° Se una quantità farà uguale ad un' altra, ſi potrà ſoſtituire indifferentemente l' una all' altra.

146. Premeſſi i diviſati aſſiomi, volendo ora ridurre a equazione finale le due primitive 1.ª $x + y = a$, 2.ª $x = y + c$ del problema (§. 141.), convien fare ſcomparire una delle incognite col laſciarla ſola, e poſitiva in un membro dell' equazione, e, traſportando nell'altro membro tutte le altre quantità, ſi ſoſtituirà queſto valore dell' incognita in quell' altra equazione, da cui ſi vuole eſterminare. Queſt' operazione, ſebben poſſa farſi ad arbitrio in quella delle equazioni primitive, che più piace, nulla di meno per maggior facilità ſi pratica nell' equazione la più ſemplice. Nel caſo noſtro ſi ha nella ſeconda equazione l' incognita x ſola, e poſitiva nel primo membro; e però per farla ſparire dalla prima equazione baſterà in vece di quella ſcrivere il ſuo valore uguale (§. 145. n. 6.) $y + c$, e s' avrà 1.ª $y + c + y = a$, e, corretta l'eſpreſſione, ſarà $2y + c = a$ equazione finale, che con una ſola incognita abbraccia le due condizioni del problema.

147. Per ridurre a equazione finale le due primitive (§. 143.), cioè 1.ª $ax = c^2$,

2.da $cx = ay$, converrà nella prima lasciare l'incognita x sola, e positiva. A tal fine si dividerà ciascun membro per a, e sarà $\frac{ax}{a} = \frac{c^2}{a}$, e, correggendo l'espressione, sarà $x = \frac{c^2}{a}$. Sostituiscasi questo valore di x nella seconda equazione, e sarà $c \times \frac{c^2}{a} = ay = \frac{c^3}{a}$ equazione finale, in cui più non compare l'incognita x, e nella quale si trovano inchiuse le due condizioni del problema.

148. Volendo ridurre a equazione finale le tre primitive del problema (§. 142.), cioè 1.a $x + 2y = a$, 2.da $3x - 4z = b$, 3.a $\frac{y}{2} + z = c$, si comincerà a fare scomparire x, e per ciò nella prima equazione, come la più semplice, si leverà $2y$ nei due membri dell'equazione (§. 145. n. 2.), e s'avrà

1.a $x + 2y - 2y = a - 2y$, e, correggendo l'espressione, sarà 1.a $x = a - 2y$. Sostituiscasi questo valore di x nella seconda equazione (§. 145. n. 6.), in cui esso x trovasi moltiplicato per 3, e s'avrà 2.da $3 \times \overline{a - 2y} - 4z = b$, e facendo l'attuale moltiplica, sarà 2.da $3a - 6y - 4z = b$,

in cui più non compare l' incognita x.

Colla fatta operazione le tre equazioni primitive ſaranno ridotte a due, nelle quali trovanſi due ſole incognite, cioè 2.da $3a - 6y - 4z = b$ equazione derivativa, 3.a $\frac{y}{2} + z = c$ equazione primitiva.

Per eſterminare ora l'incognita z ſi ſceglierà la più ſemplice di queſte due equazioni, cioè la terza, e levando in ciaſchedun membro il termine $\frac{y}{2}$, s'avrà

3.a $\frac{y}{2} - \frac{y}{2} + z = c - \frac{y}{2}$, e, correggendo l'eſpreſſione, ſarà 3.a $z = c - \frac{y}{2}$. Soſtituiſcaſi ora queſto valore di z nella ſeconda equazione $3a - 6y - 4z = b$; e ſiccome z trovaſi moltiplicato per 4, così il ſuo valore uguale $c - \frac{y}{2}$ ſi moltiplicherà pure per 4, e s'avrà 2.da $3a - 6y - 4 \times \overline{c - \frac{y}{2}} = b$, e facendo l'attuale moltiplica, e, correggendo l'eſpreſſione, ſarà 2.da $3a - 4y - 4c = b$ equazione finale, che abbraccia tutte le condizioni del problema, ed in cui trovaſi la ſola incognita y.

Trovare il valore dell' incognita nell' equazione finale.

149. Per trovare il valore dell' incognita in una equazione fa di meſtiere laſciare eſſa incognita in un membro ſola, e poſitiva, e libera da qualunque coefficiente, e diviſore, e traſportare tutte le altre quantità nell'altro membro dell' equazione; per lo che convien valerſi degli aſſiomi dati (§. 145.), cioè ſi dee far uſo della ſomma, o della ſottrazione, della moltiplicazione, o della diviſione, o pure inalzare la quantità a qualche poteſtà, eſtrarre radici, o finalmente praticare due, o più di queſte regole. Tali operazioni ſi dicono *Riſolvere l' equazione.*

Nel ridurre le equazioni primitive alla finale ſi è già data un'idea dell' uſo delle diviſate regole. Quanto ſi dirà nel ſeguito ſervirà a renderne familiare l' applicazione alla pratica.

150. Col ſommare ſi può fare, che un termine, che è in un membro dell' equazione, paſſi nell'altro ſenza punto togliere l' uguaglianza; laonde per far paſſare nel ſecondo membro il termine $-a$, che nell' equazione $x - a = b$ ſi trova nel primo, s' aggiugnerà la quantità a tanto all'

uno, quanto all'altro membro, e s'avrà $x - a + a = b + a$ (§. 145. n. 2.), e, correggendo l'espressione, s'avrà l'equazione $x = b + a$, ed in tale modo il termine $- a$, che era nel primo membro, si trova in quest'equazione nel secondo, come s'era proposto.

Se l'equazione proposta fosse $x + a = b$, per far passare il termine $+ a$ nell'altro membro si sottrerrà $+ a$ dall'uno, e dall'altro membro dell'equazione (§. 145. n. 2.), e s'avrà $x + a - a = b - a$, o sia $x = b - a$, dove il termine a, che nell'equazione proposta era nel primo membro, si trova in quest'ultima nel secondo.

151. Si dirà adunque per regola generalissima, che, qualunque volta occorrerà trasportare un termine dall'uno nell'altro membro dell'equazione, basterà scancellare esso termine da quel membro, in cui si trova, e scriverlo nell'altro col segno mutato.

152. Si risolvono in oltre le equazioni colla moltiplicazione, affine di liberarle dalle frazioni, che talvolta contengono (§. 145. n. 3.), il che si fa col moltiplicare tutti i termini dell'equazione pel denominatore d'ogni frazione, che trovasi nell'equazione. Se s'abbia l'equazione

$\frac{xd}{a} = b + c$, la quale ſi voglia liberare dalla frazione, ſi moltiplicheranno i due membri d' eſſa pel denominatore a della frazione, e s' avrà $\frac{axd}{a} = ab + ac$, e, correggendo l' eſpreſſione, s' avrà l' equazione $xd = ab + ac$. Così ancora, ſe ſia propoſta l' equazione $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = b$, la quale ſi dee liberare dalle frazioni, ſi moltiplicheranno tutti i termini d' eſſa per li denominatori 2, 3, e s' avrà l' equazione $\frac{6x}{2} + \frac{12x}{3} = 6b$, la quale, corretta l'eſpreſſione, ſi riduce a queſt'altra $7x = 6b$.

Si uſa la diviſione per liberare l' incognita da un coefficiente diverſo dall' unità. Per eſempio, ſe s'abbia l'equazione $cx = d - a$, in cui ſi voglia liberare l'incognità x dalla quantità c, ſi dividerà l'uno, e l' altro membro dell' equazione per c (§. 145. n. 3.), e s' avrà $x = \frac{d-a}{c}$; parimente, ſe ſi divide l' uno, e l' altro membro dell'equazione $x + 2bx + cx = d + r$ per $1 + 2b + c$, ſi ha $x = \frac{d+r}{1+2b+c}$

153. Allorchè un' equazione contiene qualche radicale, ſi può da eſſo liberare coll' inalzare l' uno, e l' altro membro ad una poteſtà, in cui eſponente ſia lo ſteſſo, che quello del radicale da toglierſi (§. 145. n. 5.); e così, ſe l' equazione $\sqrt{aa-xx} = x-b$ ſi dee liberare dal ſegno radicale, s' eleverà l' uno, e l' altro membro al quadrato, e s'avrà $aa-x^2 = x^2-2bx+bb$; così ancora, ſe ſi dovrà liberare dai radicali l' equazione $\sqrt[3]{b^2+\sqrt{x}} = a$, s' inalzerà l' uno, e l' altro membro al cubo, e s'avrà $b^2+\sqrt{x} = a^3$, e traſportando b^2 nell'altro membro, s'avrà $\sqrt{x} = a^3-b^2$, e quadrato ciaſcun membro di queſt'equazione, s'avrà finalmente $x = a^6-2a^3b^2+b^4$.

154. Si riſolve l' equazione coll' eſtrazione di radici, allorchè l' incognita ſi trova inalzata a qualche poteſtà; a tal fine ſi cava dall' uno, e dall' altro membro la radice indicata dall' eſponente della poteſtà dell' incognita (§. 145. n. 4.). Per trovare il valore di x nell' equazione $x^2 = aa$, ſi caverà la radice quadrata dall' uno, e dall' altro membro, e s' avrà $x = a$; per riſolvere l' equazione $x^3 = a^3b$, ſi eſtrarrà la radice cubica, e ſarà $x = a\sqrt[3]{b}$.

155. Occorre non di raro, che per risolvere un' equazione fa di mestiere valersi di due, o più delle precedenti regole; per esempio per risolvere l'equazione $3\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - m = b$; si comincia a far passare $-m$ nel secondo membro dell' equazione, e si ha $3\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} = b + m$, indi si moltiplica l'uno, e l'altro membro pel denominatore 2, e si divide pel numeratore 3, il che somministra l'equazione $\sqrt[3]{x^2} = \frac{2b + 2m}{3}$, ed inalzando l'uno, e l' altro membro al cubo, si ha $x^2 = \frac{8b^3 + 24b^2m + 24bm^2 + 8m^3}{27}$; e finalmente, cavando la radice quadrata, s' arriva ad avere

$$x = \sqrt{\frac{8b^3 + 24b^2m + 24bm^2 + 8m^3}{27}}.$$

156. Dopo d' aver trovato il valore dell' incognita nell' equazione finale, se per risolvere il problema se ne sono espresse le condizioni con due, o più equazioni primitive, converrà sostituirne il valore in una delle altre equazioni, in cui essa incognita si ritrovava con un' altra, affine di avere il valore di quest' altra in-

cognita; e ſe, ciò fatto, s'avrà ancora una terza incognita, s'opererà pure nella ſteſſa maniera per averne il valore, e così di mano in mano: per eſempio: nel problema (§. 146.) l'equazione finale è $2y + c = a$, in cui, trovando il valore di y, ſi ha $y = \frac{a-c}{2}$. Soſtituiſcaſi queſto valore nella ſeconda equazione $x = y + c$, e s'avrà il valore di $x = \frac{a-c}{2} + c$, e, correggendo l'eſpreſſione, ſarà $x = \frac{a+c}{2}$.

Nel problema del (§. 148.) l'equazione finale è $3a - 4y - 4c = b$; ſe in queſt'equazione ſi troverà il valore di y reſo poſitivo (§. 149.), ſarà $\frac{3a-4c-b}{4} = y$. Soſtituiſcaſi queſto valore nella terza equazione $z = c - \frac{y}{2}$, e ſarà $z = c - \frac{3a+4c+b}{8}$, e, corretta l'eſpreſſione, s'avrà $z = \frac{12c-3a+b}{8}$. Finalmente, ſe il ritrovato valore di y ſi ſoſtituirà nella prima equazione $x = a - 2y$, s'avrà $x = a - 2 \times \frac{3a-4c-b}{4}$, e correggendo l'eſ-

preſſione ſarà $x = \frac{4c - a + b}{2}$, e quindi ſi avranno i valori delle tre incognite.

CAPO II.

Riſolvere i problemi numerici, le cui equazioni finali ſono pure.

157. Ognorachè nell'equazione finale l'incognita ſi trova in un ſolo termine, come $x = a + b$, $y^2 = c\,m$, $z^3 = \frac{d^3fg - am^3}{f}$, o che, eſſendo eſſa incognita in due, o più termini, ſi trova elevata alla medeſima poteſtà, come $bx - dx = \frac{ad}{f}$, $ay^2 + fy^2 = K^3 - d^2l$, l'equazione ſi chiama *Pura*; ma ſe l'incognita ſi troverà in due, o più termini elevata a poteſtà diverſe, come $z^2 + az = c^2$, $x^3 - cx^2 = fd^2 + b^3$, $y^3 + 25y = \frac{130}{7}$, l'equazione ſi dirà *Affetta*.

158. La maſſima poteſtà dell'incognita nell'equazione finale ſerve a diſtinguere il grado del problema. E però, ſe l'incognita avrà l'unità per eſponente, il problema ſi dirà del primo grado, ſe l'eſpo-

nente maſſimo dell' incognita ſarà 2, il problema ſarà del ſecondo grado, e ſi dirà del terzo grado il problema, ſe il detto eſponente maſſimo ſarà 3, e così ſucceſſivamente.

Occorrendo poi, che l' incognita s' incontraſſe in tutti i termini dell' equazione finale, queſta ſi dividerà per l' incognita, che ha il minor eſponente, e il problema ſi dirà del grado, cui trovaſi elevata l'incognita in queſto quoziente. Per eſempio ſe l' equazione finale ſia $x^4 = a^3 x$, ſi dividerà per x, e s'avrà $x^3 = a^3$ di quoziente, in cui, eſſendo l' incognita elevata al terzo grado, ſi dirà, che il problema è del terzo grado; e così ancora, ſe s'abbia l' equazione finale $z^5 - a^2 z^3 = c z^4$, ſi dividerà per z^3, e s' avrà il quoziente $z^2 - a^2 = cz$, e quindi il problema ſarà di 2.do grado.

159. L' incognita nei problemi di primo grado non può avere che un valore poſitivo, o negativo; ma nei problemi di ſecondo grado, la cui equazione finale è pura, il valore della medeſima incognita ſi può prendere poſitivo, o negativo. Se nell' equazione $x^2 = 36$ ſi eſtrarrà la radice quadrata da ciaſchedun membro, s'avrà $x = \pm 6$, vale a dire che il valore di x

ſi

ſi potrà prendere poſitivo, e negativo; giacchè in ambedue i caſi ſi ſoddisfa ſempre alle condizioni del problema.

La medeſima coſa dovrà dirſi di tutte le poteſtà poſitive, gli eſponenti delle quali ſono numero pari (§. 17.): ſe ſi eſtrarrà la radice quarta dall' equazione $z^4 = 2401$, s' avrà $z = \pm 7$; onde col pigliare queſto valore poſitivo, o negativo ſi ſoddisfa eſattamente alle condizioni del problema. Ma non potrà già dirſi l'iſteſſo riſpetto alle equazioni pure, in cui la poteſtà dell'incognita ha per eſponente un numero diſpari; imperciocchè, ſe queſta poteſtà ſarà poſitiva, tale ſarà anche la ſua radice, e, ſe la poteſtà ſarà negativa, la radice ſarà pure negativa. Eſtraendo la radice cubica dall'equazione $y^3 = 64$, s'avrà $y = 4$, e, ſe l'equazione ſarà $y^3 = -64$, la radice ſarà $y = -4$ (§. 17.)

160. Il valore dell' incognita, o dicaſi della radice, che ſi cava da una qualche poteſtà, è già ſtato diſtinto in *Reale*, ed *Immaginario* (§. 18.), e ſi è pure fatto oſſervare in detto paragrafo, che i valori immaginarj naſcono dal dover eſtrarre la radice quadrata da una quantità negativa. Ora, avendo fatto vedere nell' antecedente paragrafo, che nelle equazioni di ſe-

condo grado l'incognita ha due valori, giacchè la radice quadrata ſi può prendere a beneplacito poſitiva, o negativa, conſegue, che, qualora s'incontrano delle immaginarie in qualche equazione, eſſe debbono per neceſſità eſſere ſempre accoppiate due a due.

Da quì avviene, che nelle equazioni di quarto grado i valori dell' incognita poſſono eſſere tutti quattro reali, o tutti immaginarj, o pure due di eſſi eſſere reali, ed immaginarj gli due altri; e così ancora nelle equazioni di ſeſto grado i valori dell' incognita poſſono eſſere tutti e ſei reali, o tutti immaginarj, o pure due immaginarj, e quattro reali, o pure quattro immaginarj, e reali gli altri due, e così delle altre equazioni, in cui l' indice della poteſtà dell' incognita è eſpreſſo da un numero pari. Da ciò conſegue, che i problemi di grado eſpreſſo da un numero pari non ſi poſſono ſempre riſolvere, ed è, quando le loro radici ſono tutte immaginarie. Tale impoſſibilità naſce dall'eſſere aſſurde le condizioni poſte nel problema.

Contrariamente le equazioni, in cui l' eſponente dell' incognita è numero diſpari, ſi poſſono ſempre riſolvere, ſtantechè l' incognita ha almeno un valore reale.

Si risolvono problemi del primo grado.

161. Per risolvere un problema non è in alcun modo necessario di conoscere da principio di qual grado egli sia, ma basta comprendere chiaramente lo stato della questione; indi distenderne il canone, e poscia esprimere le condizioni del problema colle equazioni primitive.

Ciò fatto, convien ridurre queste equazioni alla finale, la quale si maneggia poi colle date regole per avere il valore dell'incognita, e questo si va poi sostituendo nelle altre equazioni per avere il valore delle altre incognite (§. 156.). Le esercitazioni, che si faranno nella soluzione de' seguenti problemi, renderanno facilissimo l'uso delle addotte regole.

162. Due Bombardieri hanno gettato in un forte 150 bombe in modo, che il primo ne ha gettato 20 di più del secondo. Domandasi quante ne ha gettato ciascheduno d'essi.

Si cominci a considerare attentamente la questione, e, dopo d'essersene formata una idea chiara, e distinta, si distenda il canone, in cui sia

Canone.

Somma $150 = a$

Differenza $20 = c$

Il numero delle bombe gettate dal primo $= x$

Quelle gettate dal ſecondo $= y$.

Ciò fatto ſi rifletta, che le bombe gettate dal primo unite a quelle gettate dal ſecondo debbono eſſere $= a$, onde s'avrà l'equazione primitiva $x + y = a$; e ſiccome il numero x delle bombe, che ha gettate il primo, ſupera la quantità y del ſecondo per la differenza c, così s'avrà una ſeconda equazione primitiva $x = y + c$.

Per ricavare da queſte due primitive l'equazione finale del problema, baſta nella prima $x + y = a$ ſoſtituire in luogo di x il ſuo valore $y + c$, che ſi ricava dalla ſeconda, e ſi ha l'equazione finale $y + y + c = a$, o ſia $2y + c = a$. Si riſolva ora queſt'equazione col far paſſare $+c$ nell'altro membro, e col dividerne per 2 l'equazione, ſi avrà $y = \frac{a-c}{2}$.

Per trovare poi il valore di x nella ſeconda equazione $x = y + c$, ſi ſoſtituirà $\frac{a-c}{2}$ in vece di y, e s'avrà $x = \frac{a-c}{2} + c$, o ſia $x = \frac{a+c}{2}$: ſe in vece delle lettere a, c ſe ne ſcriverà il valore numerico, s'avrà $y = \frac{150-20}{2} = 75 - 10 = 65$, ed

$x = \frac{150+20}{2} = 85$. Sicchè il numero delle bombe gettate dal primo ſarà 85, ed il numero di quelle gettate dal ſecondo ſarà 65, dove la ſomma di eſſe è 150, e la differenza 20, come s' è propoſto.

163. Siccome ciaſcheduna delle lettere a, c può rappreſentare qualſivoglia quantità, così ſi deduce il ſeguente corollario.

Data la ſomma, e la differenza di due quantità ſi troverà la maggiore con pigliare la metà della ſomma colla metà della differenza, e ſi troverà la minore, pigliando la metà della ſomma meno la metà della differenza.

L'uſo di queſta propoſizione rieſce ſoventi utile nel diſtendere il canone di un problema.

164. Se nel §. 162, dopo d'aver regiſtrato nel canone x pel numero maggiore, ſi foſſe eſpreſſo il numero minore per $x - c$, ſi ſarebbe in tal guiſa eſpreſſa una delle condizioni del problema (§. 140.), e quindi colla ſola equazione $x + x - c = a$ ſi ſarebbe trovato a dirittura il valore del numero maggiore $x = \frac{a+c}{2}$, e, levando da queſto la differenza $= c$, ſi ſarebbe avuto $\frac{a+c}{2} - c = \frac{a-c}{2}$ pel valore del numero minore.

165. Due Cacciatori avendo preſo un certo numero di pernici, l'uno dice all'altro, ſe tu me ne rimetteſſi due delle tue, io ne avrei il doppio di quelle, che ti reſterebbero, e, ſe io te ne rimetteſſi due delle mie, tu ne avreſti tante, quante a me rimarrebbero. Si cerca il numero delle pernici, che ciaſcuno d'eſſi ha preſo.

Ben inteſo lo ſtato della queſtione ſi diſtenda il canone, e ſia x il numero delle pernici preſe dal primo, e z quelle del ſecondo; e perchè, ſe il ſecondo ne rimetteſſe due al primo, il primo ne avrebbe il doppio del ſecondo, così $x + 2$ ſarà doppio di $z - 2$, e moltiplicando $z - 2$ per 2, s'avrà $2z - 4$, e conſeguentemente $x + 2 = 2z - 4$ ſarà la prima equazione. In oltre, ſiccome il primo rimettendone due al ſecondo, queſti ne avrà tante, quante rimarranno al primo, conſegue, che $x - 2 = z + 2$ ſarà la ſeconda equazione: dalla prima equazione $x + 2 = 2z - 4$ ſi ricava $x = 2z - 6$; ſe ſi ſoſtituiſce queſto valore di x nella ſeconda, ſi ha l'equazione finale $2z - 6 - 2 = z + 2$, e correggendo l'eſpreſſione, e, facendo paſſare z nel primo membro, e le cognite nel ſecondo (§. 149.), ſi ha $z = 10$, e, ſoſtituendo il valore di z nell'equazio-

ne $x = 2z - 6$, si trova $x = 14$; e però il primo avrà preso 14 pernici, e il secondo 10; vedendosi, che, se da 10 se ne levano 2, vi rimarrà 8, e che, se a 14 se ne aggiungono 2, s'avrà 16, che è il doppio di 8; siccome ancora, se dal primo, che ne ha 14, se ne levano 2, vi rimarrà 12, e se al secondo, che ne ha 10, s'aggiungano le due levate dal primo, s'avrà altresì 12, il tutto secondo le condizioni poste.

166. Un Padre di famiglia, discorrendo dell' età de' suoi tre figliuoli, dice così: gli anni del primo e del secondogenito insieme sono 26, quelli del secondo e terzogenito insieme sono 18, e quelli del primo e terzo sono 24, cercasi l' età di ciascheduno di questi figliuoli.

Dopo d' aver ben compreso lo stato della questione, si distenda il canone, in cui il primo numero da titrovarsi sia x, il secondo y, il terzo z, e suppongasi $26 = a$, $18 = b$, $24 = c$; ciò fatto si rifletta, che la somma del primo, e del secondo deve essere uguale 26, e però sarà $x + y = a$ prima equazione. Siccome la somma del secondo, e del terzo deve essere uguale 18, s' avrà $y + z = b$ per

la seconda equazione, e finalmente, poichè la somma del terzo, e del primo deve essere uguale 24, s'avrà $z + x = c$ per la terza equazione.

Ora da queste tre equazioni primitive se ne debbono ricavare delle derivative per ridurle poi all' equazione finale (§. 148.): a tal fine se ne pigli una delle primitive, e per esempio la seconda $y + z = b$, e, trasportando y nell' altro membro, s' avrà $z = b - y$; sostituiscasi questo valore di z nella terza equazione, si avrà la derivativa $b - y + x = c$. Con tal modo di operare in vece delle tre prime equazioni se ne avranno due sole, cioè $x + y = c$, $b - y + x = c$, nelle quali più non si trova l'incognita z.

Nella prima di queste due equazioni si trovi il valore di $x = a - y$, e si sostituisca nella seconda, s'avrà $b - y + a - y = c$ per l' equazione finale, nella quale, facendo passare l' incognita nel secondo membro, e c nel primo, sarà $b + a - c = 2y$, e $\frac{b + a - c}{2} = y$. Ritrovato in tal guisa il valore di y, si sostituisca nella equazione primitiva $x + y = a$, sarà $x + \frac{b + a - c}{2} = a$, e facendo passare le quantità cognite nel

ſecondo membro, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $x = \frac{a-b+c}{2}$.

Nella ſeconda equazione $z = b - y$ ſi ſoſtituiſca pure il ritrovato valore di y, e s' avrà $z = b - \frac{b-a+c}{2}$, o ſia $z = \frac{b-a+c}{2}$. Se in vece delle lettere ſe ne ſcriverà il valore numerico, ſarà $x = \frac{a+c-b}{2} = \frac{26+24-18}{2} = 16$;

$y = \frac{a+b-c}{2} = \frac{26+18-24}{2} = 10$;

e finalmente $z = \frac{b+c-a}{2} = \frac{18+24-26}{2} = 8$. Adunque dei tre numeri ricercati il primo ſarà 16, il ſecondo 10, il terzo 8, giacchè la ſomma del primo 16, e del ſecondo 10 è 26, la ſomma del ſecondo 10, e del terzo 8 è 18, e la ſomma del terzo 8, e del primo 16 è 24, come s' era propoſto.

167. L' addotto problema ſi può riſolvere in un'altra maniera più ſemplice col diſtendere il canone in modo, che contenga una ſola incognita. A tal fine ſia come ſopra la ſomma del primo, e del ſecondo $= a$, la ſomma del ſecondo, e

del terzo $= b$, e la ſomma del primo, e del terzo $= c$, ſi chiami il primo $= x$, il ſecondo ſarà $a - x$, ed il terzo $c - x$, e però la ſomma del ſecondo, e del terzo ſarà $a + c - 2x$, ma queſta ſomma deve eſſere $= b$; adunque s'avrà $a + c - 2x = b$, e facendo paſſare $- 2x$ nel ſecondo membro, e b nel primo, riſulterà $a + c - b = 2x$, e dividendo per 2, s'avrà $\frac{a+c-b}{2} = x$ pel valore del primo; e poichè il ſecondo numero da ritrovarſi è $a - x$, ſe in vece di x ſi ſoſtituiſce il ſuo valore $\frac{a+c-b}{2}$, ſi ha $a - \frac{a+c-b}{2}$, o ſia $\frac{a-c+b}{2}$ pel valore del ſecondo; nella ſteſſa maniera ſoſtituendo il valore di x, ſi troverà, che il valore del terzo $c - x$ ſarà $c - \frac{a+c-b}{2}$, o ſia $\frac{c+b-a}{2}$, le quali quantità ſono le medeſime, che ſi ſono ricavate col primo modo d' operare (§. 166.).

168. Si è ſpedito un diſtaccamento di 100 uomini ſomminiſtrati dai Reggimenti di Piemonte, la Marina, e Sardegna. Il triplo di quelli di Piemonte meno il qua-

druplo della Marina, più un quinto di quelli di Sardegna compongono 34 uomini, la metà di quelli di Piemonte coi due terzi della Marina oltrepaſſano di cinque uomini il doppio di quelli di Sardegna: cercaſi quanti uomini ha ſomminiſtrato ciaſchedun Reggimento.

Dopo d'aver ben compreſo lo ſtato della queſtione, ſe ne diſtenda il canone, ſupponendo i ſoldati ſomminiſtrati da Piemonte $= x$, quelli della Marina $= y$, e gli altri ſomminiſtrati da Sardegna $= z$. Ciò fatto s'individueranno i dati del problema colle prime lettere, o pure ſi farà uſo a dirittura dei numeri cogniti, e ſi eſprimeranno le condizioni del problema colle tre ſeguenti equazioni primitive

1.ª $x + y + z = 100.$

2.da $3x - 4y + \frac{z}{5} = 34.$

3.ª $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} - 5 = 2z.$

In una delle tre equazioni, e per eſempio nella prima, ove rieſce più facile l'operazione, ſi cominci a trovare il valore di una delle tre incognite, e ſia quello di x, s'avrà 1.ª $x = 100 - y - z$. Soſtituiſcaſi queſto valore di x nelle altre due equazioni, e ſarà

2.da $3 \times \overline{100 - y - z} - 4y + \frac{z}{y} = 34.$

3.a $\frac{100 - y - z}{2} + \frac{2y}{3} - 5 = 2z.$

Si facciano le attuali moltipliche, si liberino l'equazioni dai rotti, e si correggano le espressioni, s' avrà

2.da $1500 - 35y - 14z = 170.$

3.a $270 + y = 15z.$

nelle quali l'incognita x più non compare.

In una di queste equazioni derivative si trovi il valore di quell'incognita, ove si scorge più semplice l'operazione, e per esempio nella 3.a, s'avrà $y = 15z - 270$; si sostituisca questo valore di y nella seconda derivativa, e sarà

2.da $1500 - 35 \times \overline{15z - 270} - 14z = 170,$

o sia $1500 - 525z + 9450 - 14z = 170,$ e col far passare 170 nel primo membro, e z nel secondo, affine di avere quest'incognita positiva, sarà, dopo d' aver corretta l' espressione,

2.da $10780 = 539z,$ e quindi

2.da $\frac{10780}{539} = z = 20.$ Si sostituisca questo valore di z nella equazione

3.a $y = 15z - 270,$ e sarà

$y = 15 \times 20 - 270 = 300 - 270 = 30.$

Finalmente, se nella prima equazione

$x = 100 - y - z$ si sostituiranno i valori ritrovati di y, e z, s' avrà quello di $x = 100 - 30 - 20 = 50$. Sicchè i Soldati somministrati dal Reggimento Piemonte saranno 50, 30 quelli della Marina, e 20 quelli di Sardegna.

169. Se dopo d'aver notato nel canone

I Piemontesi $= x$.

La Marina $= y$.

si fosse registrato $100 - x - y$ per li soldati di Sardegna, si sarebbe con ciò adempiuta una condizione del problema (§. 144.), onde si sarebbero avute due sole equazioni, e quindi la soluzione del problema sarebbe riuscita più semplice.

170. Nei precedenti problemi è riuscito cosa facile l'esprimerne le condizioni colle equazioni; ma nei due seguenti fa di mestiere usare un qualche raziocinio per ridurre il problema a equazione.

Un Corriere partì per Napoli con ordine di fare 30 miglia per giorno. Dal medesimo luogo quattro giorni dopo ne fu spedito un altro con ordine di fare 40 miglia per giorno; si ricerca in quanti giorni il secondo giugnerà il primo. Ben inteso lo stato della questione suppongasi $30 = a$, $40 = b$, $4 = c$, il numero dei giorni, che impiegherà il secondo per

giugnere il primo ſia $= x$; perchè il primo è partito quattro giorni avanti del ſecondo, il viaggio fatto dal primo, avanti che partiſſe il ſecondo, ſarà $a \times c$, e ſiccome il ſecondo deve giugnere il primo nel tempo x, così il viaggio, che il primo ha ancor da fare dopo la partenza del ſecondo, ſarà $a \times x$; perciò tutto il viaggio, che il primo avrà fatto, quando ſarà giunto dal ſecondo, ſarà $ac + ax$; e poichè il ſecondo deve giugnere il primo nel tempo x, ſarà bx il viaggio fatto dal ſecondo, qualora avrà giunto il primo; ma, quando il ſecondo raggiugne il primo, il ſuo viaggio è uguale a quello del primo, adunque s' avrà l' equazione $ac + ax = bx$, e facendo paſſare ax nel ſecondo membro, s' avrà $ac = bx - ax$, e dividendo per $b - a$, ſarà $\frac{ac}{b-a} = x$, e ſoſtituendo i numeri in luogo delle lettere, ſi troverà $\frac{30 \times 4}{40-30} = x$, o ſia

$x = \frac{30 \times 4}{40-30} = \frac{120}{10} = 12$; ſicchè in 12 giorni il ſecondo avrà giunto il primo; eſſendo ancora manifeſto, che, ſe il ſecondo ha viaggiato 12 giorni, il primo avrà viaggiato 16 per eſſere partito quattro

giorni avanti; e perchè il ſecondo deve fare 40 miglia per giorno, tutto il viaggio del ſecondo ſarà $12 \times 40 = 480$, ma il primo ne deve fare ſolamente 30 per giorno, adunque tutto il viaggio del primo ſarà $16 \times 30 = 480$.

171. Un trafficante ha due qualità di formento, una delle quali vale ll. 20 il ſacco, e l'altra vale ll. 15; egli ne vuole inviare ſul mercato 36 ſacchi, meſcolando queſte due qualità per vendere il meſcuglio a ll. 18 il ſacco. Cercaſi quanto ne dovrà prendere di ciaſcheduna qualità.

Dopo d'aver concepito lo ſtato della queſtione ſi diſtenda il canone, e ſia ll. $20 = a$, $15 = b$, $18 = c$, $36 = d$; la quantità del formento di minor prezzo, che ſi vuole meſcolare coll'altra, ſia $= x$, ſarà $d - x$ la quantità del prezzo maggiore. Se ſi moltiplica x per b ſi ha nel prodotto bx il valore del formento di minor prezzo, e moltiplicando $d - x$ per a, ſi ha nel prodotto $ad - ax$ il valore del formento di maggior prezzo; e però la ſomma d'eſſe due quantità ſarà $bx + ad - ax$; ma a tenore della condizione del problema queſto prezzo dee eſſere uguale al prodotto cd, cioè alli ſacchi 36 molti-

plicati per ll. 18; adunque s'avrà l'equazione $bx + ad - ax = cd$; e ſiccome $b - a$ è una quantità negativa, perchè $b < a$, così per avere l'incognita poſitiva ſi traſporterà $bx - ax$ nel ſecondo membro, e ſi farà paſſare cd nel primo, e s'avrà $ad - cd = ax - bx$, e dividendo per $a - b$, s'avrà $\frac{ad-cd}{a-b} = x$ quantità del formento del minor prezzo, e ſarà $d - \frac{ad+cd}{a-b} = \frac{cd-bd}{a-b}$ la quantità del formento di maggior prezzo.

Se in vece delle lettere ſi ſoſtituiranno i numeri dati, ſi troverà, che ſi debbono prendere ſacchi $14\frac{2}{5}$ del formento di minor qualità, e ſacchi $21\frac{3}{5}$ della qualità migliore, i quali inſieme meſcolati, e venduti a ll. 18 il ſacco daranno ll. 648, prezzo, che ſi ricaverebbe, ſe ſi vendeſſero ſacchi $14\frac{2}{5}$ a ll. 15 ciaſcuno, e ſacchi $21\frac{3}{5}$ a ll. 20 ognuno.

172. Due giocatori hanno messo in fondo un certo numero di doppie, di maniera che quelle poste dal primo uguagliavano li $\frac{4}{5}$ di quelle poste dal secondo, e, se si moltiplicano fra loro questi due fondi, costituiscono doppie 2880. Essi ne hanno guadagnato 675. Cercasi il capitale, ed il guadagno d'ognuno d'essi.

Dopo d'essersi formata una idea chiara dello stato della questione, si distenda il canone, e sia $4x$ il fondo del primo, sarà $5x$ quello del secondo, e però, moltiplicando questi due capitali fra di loro, s'avrà $20x^2$ di prodotto, che dee essere uguale a 2880; sicchè s'avrà l'equazione $20x^2 = 2880$, e dividendo per 20, sarà $x^2 = 144$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà $x = \pm 12$; ma perchè il fondo del primo egli è $4x$, e quello del secondo $5x$, così moltiplicando il 12 per 4, s'avrà 48 pel capitale del primo, e moltiplicando 12 per 5, s'avrà 60 pel capitale del secondo.

Ciò fatto, si usi la regola di Compagnia col sommare i due capitali insieme per avere 108, indi s'instituisca la proporzione

$108 : 675 :: 48 : \frac{48 \times 675}{108}$, cioè la ſomma 108 ſtà al guadagno totale 675, come 48 capitale del primo ſtà al ſuo guadagno particolare, che ſi troverà di 300 doppie, e quindi il guadagno del ſecondo ſarà di doppie 375.

173. Si ſono coſtrutte tre batterie di cannoni, delle quali ſi ſa, che moltiplicando il numero de' cannoni meſſi nella prima per quelli della ſeconda ſi ha 640; moltiplicando i cannoni della prima per quelli della terza ſi ha 448, e moltiplicando i pezzi della ſeconda batteria per quelli della terza ſi ha 280. Cercaſi quanti cannoni ſianſi meſſi in ciaſcuna batteria.

Supponganſi i cannoni della prima batteria $= x$, quelli della ſeconda $= y$, e quelli della terza $= z$, s' avranno le tre ſeguenti equazioni.

$$1.^a \; xy = 640$$
$$2.^{da} \; xz = 448$$
$$3.^a \; yz = 280$$

Si cominci a trovare il valore di un'incognita in una di queſte equazioni, e per eſempio il valore di x nella prima, ſarà $1.^a \; x = \frac{640}{y}$, e ſoſtituito queſto valore di x nella $2.^{da}$ equazione, ſarà $\frac{640z}{y} = 448$,

e liberando l'equazione dal divisore y, sarà $640z = 448y$; si avranno adunque le due seguenti equazioni con due sole incognite, cioè

$$2.^{da}\ 640z = 448y$$
$$3.^{a}\ yz = 280$$

Nella meno composta di queste due equazioni si trovi il valore di z, o di y, e per esempio nella 3.ª si faccia $y = \frac{280}{z}$, si sostituisca il valore di y nella 2.da equazione, s'avrà $640z = 448 \times \frac{280}{z}$, e liberando l'equazione dal denominatore z, e dividendo per 640, s'avrà $z^2 = \frac{448 \times 280}{640} = 196$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà $z = 14$. Si sostituisca questo valore di z nella terza equazione $y = \frac{280}{z}$, e sarà $y = \frac{280}{14} = 20$: finalmente si sostituisca il valore di y nella prima equazione $x = \frac{640}{y}$, s'avrà $x = \frac{640}{20} = 32$. E però saranno 32 i cannoni della prima batteria, 20 quelli della seconda, e 14 nella terza.

174. Si desidera sapere quale sia l'età del padre, della madre, e del figlio me-

diante i ſeguenti dati. Se ſi moltiplica l'età del padre per quella della madre, e del figlio ſi ha 9600 di prodotto; moltiplicando l'età del padre pel quadrato dell'età della madre s'ottiene il prodotto 36000; e, ſe ſi moltiplica l'età della madre pel quadrato dell'età del figlio, ſi ha 1920.

Sia l'età del padre $= x$

L'età della madre $= y$, e

L'età del figlio $= z$, s'avranno le tre equazioni

1.ª $xyz = 9600$

2.da $xy^2 = 36000$

3.ª $yz^2 = 1920$

Si cominci a trovare il valore di una delle incognite, e per eſempio di y nella terza equazione, ſarà $y = \frac{1920}{z^2}$. Soſtituiſcaſi queſto valore nelle altre due equazioni, e s'avrà

1.ª $xz \times \frac{1920}{z^2} = 9600$

2.da $x \times \overline{\frac{1920}{z^2}}^2 = 36000$,

e correggendo le eſpreſſioni, e liberando le equazioni dai diviſori, ſarà

1.ª $1920x = 9600z$

2.da $3686400x = 36000z^4$.

Si trovi il valore di x nella più ſemplice

equazione, cioè nella prima, e s' avrà $x = \frac{9600z}{1920} = 5z$. Si sostituisca questo valore di x nella 2.da equazione, s' avrà $3686400 \times 5z = 36000z^4$, e dividendo tutta l' equazione per $5z$ (§. 158.), sarà $3686400 = 7200z^3$, o sia $\frac{3686400}{7200} = 512 = z^3$, ed estratta la radice cubica da ambe le parti, si ha $8 = z$.

Se il ritrovato valore di z si sostituirà nella prima equazione, s'avrà $x = 5 \times 8 = 40$, e col sostituire il valore di z nella terza equazione, s' avrà $y = \frac{1920}{8 \times 8} = 30$. E però l'età del padre sarà di 40 anni, quella della madre sarà di anni 30, e di 8 anni l'età del figliuolo.

175. Un Cannoniere ha ricevuto una gratificazione equivalente ai $\frac{3}{4}$ di quella, che è stata data al Caporale. Se si moltiplicherà la gratificazione dell'uno per quella dell' altro, e il prodotto si eleverà al quadrato, ed a questo s' aggiugnerà 336, s' avrà il numero 12000. Cercasi quale sia la gratificazione d' ognuno d' essi.

Se la gratificazione del Cannoniere sia $= 3x$, quella del Caporale sarà $= 4x$,

e però il prodotto di queſte due gratificazioni ſarà $12x^2$, ed elevando queſta quantità al quadrato, s' avrà $144x^4$, cui aggiugnendo 336, s' avrà l' equazione $144x^4+336=12000$, o ſia $x^4=\frac{12000-336}{144}$ $=81$, ed eſtratta la radice quarta, ſarà $x=3$; o pure ſi potrà eſtrarre la radice quadrata, e s' avrà $x^2=9$, ed eſtratta di nuovo la radice quadrata da queſt' ultima equazione, ſarà come prima $x=3$. Ora, ſiccome nel canone ſi è eſpreſſa per $3x$ la gratificazione del Cannoniere, e per $4x$ quella del Caporale, ne conſegue, che la gratificazione del Cannoniere ſarà $3\times3=9$, e quella del Caporale ſarà $3\times4=12$.

176. Cinque Negozianti, avendo fatto ſocietà, hanno meſſo in fondo un certo numero di Lisbonine in modo, che il capitale del ſecondo è doppio di quello del primo, il capitale del terzo è triplo del primo, quadruplo quello del quarto, e quintuplo quello dell' ultimo. Se ſi moltiplica il quadrato del capitale del primo pel quadrato del capitale del terzo, e queſto prodotto ſi moltiplica ancora pel capitale del quinto ſi ha il numero 35831808o. S' addimanda quale ſia il capitale di ciaſcheduno.

Se il capitale meſſo dal primo ſi chiami $= x$, ſarà quello del ſecondo $= 2x$, del terzo $= 3x$, del quarto $= 4x$, e dell' ultimo $= 5x$; e però ſarà il quadrato del primo $= x^2$, ed il quadrato del terzo $= 9x^2$, e quindi il prodotto di queſti due numeri ſarà $9x^4$, che moltiplicato per $5x$ darà $45x^5$, quantità, che per eſſere uguale al numero cognito ſomminiſtrerà l' equazione $45x^5 = 358318080$, e dividendo per 45, s' avrà $x^5 = 7962624$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quinta, ſarà $x = 24$ capitale del p.^{mo}, e quindi ſarà 48 il capitale del 2.do, 72 il capitale del terzo, 96 il fondo del quarto, e 120 il fondo del quinto.

CAPO III.

Riſolvere i problemi numerici di grado ſuperiore al primo, le cui equazioni finali ſono affette.

177. Sebbene, come già ſi diſſe (§. 161.), per ridurre un problema a equazione finale non ſia neceſſario di conoſcere da principio di qual grado egli ſia, nulladimeno queſta cognizione rieſce ſovente utile nei problemi molto compoſti per diſtenderne il

canone in modo, che l'equazione finale venga abbaſſata più, che ſi può. A tal fine convien ſapere, che in ciaſchedun grado evvi un problema generale, cui tutti gli altri dello ſteſſo grado ſi riferiſcono. Tutti i problemi del primo grado ſi riducono a queſto generaliſſimo. A due date grandezze trovare una terza proporzionale, o pure a tre date grandezze trovare una quarta proporzionale.

Tutti i problemi del ſecondo grado ſi riducono a queſto generaliſſimo. Date due grandezze trovare una proporzionale di mezzo.

Tutti i problemi del terzo grado ſi riducono a queſto generaliſſimo. Date due grandezze trovare due proporzionali di mezzo.

E così ancora tutti i problemi del quarto grado ſi riducono a trovare tre proporzionali di mezzo fra due date grandezze, e tutti i problemi del quinto grado ſi riducono a trovare quattro proporzionali di mezzo fra due date grandezze, e così ſucceſſivamente.

178. Ma perchè la maniera, con cui ſono eſpreſſi i problemi particolari, naſconde il più delle volte la relazione, che queſti hanno col problema generaliſ-

ſimo, cui eſſi particolari ſi riferiſcono, così per individuare il grado, al quale il problema propoſto s' appartiene, ſi danno i ſeguenti indirizzi.

Ogniqualvoltachè le incognite ſi ſommano, o ſi ſottrano vicendevolmente, il problema rieſce del primo grado. Se le incognite ſi moltiplicano fra loro due a due, o ſe ſi moltiplicano una volta in ſe medeſime, il problema rieſce di ſecondo grado; e rieſce poi del terzo grado il problema, qualora le incognite ſi moltiplicano tre a tre, o pure che un' incognita ſi moltiplica due volte in ſe medeſima; e così il problema rieſce del quarto grado, qualora le incognite ſi moltiplicano quattro a quattro, e rieſce del quinto grado, ſe le incognite ſi moltiplicano fra di loro cinque a cinque, o pure che l' incognita ſi moltiplica quattro volte in ſe medeſima, e così di mano in mano. Coll' eſaminare i problemi dati nel Capo antecedente s'avrà un riſcontro di queſta teoria.

179. Allorchè un' incognita moltiplica un' altra incognita, l' equazione rieſce pura; ma ſe un' incognita moltiplica una quantità compoſta di un' altra incognita, e di una, o più cognite, o pure che due quantità compoſte d' incognite, e di co-

gnite ſi moltiplicano fra loro, allora l'equazione rieſce ſempre affetta.

Eſterminare l' incognita nelle equazioni di grado ſuperiore al primo.

180. Nel ridurre a equazione finale le primitive di un problema di grado ſuperiore al primo ſi dee prima d' ogni coſa, come già ſi diſſe, ſcegliere fra eſſe primitive la più ſemplice, e, trovato il valore dell' incognita, ſoſtituirlo nelle altre equazioni più compoſte; e così di mano in mano, finchè col ridurre tutte le equazioni s' arrivi alla finale: ma perchè in queſti maneggi ſi poſſono uſare dei ripieghi diverſi dalli fin quì ſpiegati, mediante i quali ſi rendono aſſai più ſemplici le eſpreſſioni, così ne addurremo alcuni eſempj, e faremo oſſervare, che tutto queſto maneggio dipende ſempre dagli aſſiomi regiſtrati (§. 145.).

181. Abbianſi le due equazioni primitive di un qualche problema.

$$1.^a\ x^2 - z^2 = a$$
$$2.^{da}\ 2x^2 + 2z^2 = c.$$

Nella prima ſi trovi il valore di $x^2 = a + z^2$, e queſto ſi ſoſtituiſca nella ſeconda equazione, s' avrà $2a + 2z^2 + 2z^2 = c$,

e correggendo l'espressione, e dividendo per 4, s'avrà l'equazione finale $z^2 = \frac{c-2a}{4}$, e sostituendo questo valore nella prima equazione $x^2 = a + z^2$, si ha $x^2 = a + \frac{c-2a}{4} = \frac{c+2a}{4}$, e quindi $x = \frac{\sqrt{c+2a}}{2}$, e $z = \frac{\sqrt{c-2a}}{2}$.

182. Abbiansi le due equazioni primitive di un problema

1.ª $xz = a$

2.da $x^2 + z^2 = c$

Se nella prima si trova il valore di $x = \frac{a}{z}$, e questo si sostituisce nella seconda, si ha $\frac{a^2}{z^2} + z^2 = c$, e facendo scomparire il rotto, risulta $a^2 + z^4 = cz^2$, equazione affetta di quarto grado.

183. Se in vece di maneggiare col solito indirizzo le due equazioni

1.ª $xz = a$

2.da $x^2 + z^2 = c$

proposte nell'antecedente paragrafo si useranno i seguenti ripieghi, si otterrà a dirittura una equazione finale di secondo grado affetta.

Si moltiplica la prima equazione per 2, e si ha $2xz = 2a$, si somma indi quest' equazione colla seconda, e si ha $x^2 + 2xz + z^2 = c + 2a$, e cavando la radice quadrata da ambedue i membri si ha $x + z = \sqrt{c+2a}$. Se poi si sottrerrà l' equazione $2xz = 2a$ dalla seconda, s'avrà $x^2 - 2xz + z^2 = c - 2a$, e cavando la radice quadrata, si avrà $x - z = \sqrt{c-2a}$. Si sommi ora questa radice coll' altra ritrovata, e sarà $2x = \sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}$, equazione finale, in cui, essendo $x = \frac{\sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}}{2}$, basta sostituire questo valore di x nella prima equazione $xz = a$ per avere il valore di $z = \frac{2a}{\sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}}$.

184. Se nell'adempiere le condizioni di un qualche problema si sono ottenute le due equazioni primitive

1.ª $x^3 = ay$

2.da $cx + x^2 = xy + y^2$

Si scelga la prima, come la più semplice, in cui si estermini y, e s' avrà $\frac{x^3}{a} = y$; sostituiscasi questo suo valore nella seconda equazione, e sarà

2.da $cx + x^2 = \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2}$, e togliendo le fra-

zioni, e dividendo per x (§. 158.), s'avrà la finale $a^2 c + a^2 x = a x^2 + x^2$.

185. Qualora poi l'incognita da eſterminarſi ſi trova nell'una, e nell'altra equazione elevata a grado ſuperiore, fa d'uopo in tal caſo ſcegliere l'equazione, in cui l'incognita da eſterminarſi aſcende a grado minore, e queſta ſi moltiplicherà per qualche poteſtà della medeſima incognita, acciocchè nell'una, e nell'altra equazione l'incognita, che ſi vuol fare ſcomparire, aſcenda alla medeſima maſſima poteſtà; indi trovato il valore della maſſima poteſtà in un'equazione, ſi ſoſtituirà nell'altra, e s'avrà un'equazione, dove l'incognita da eſterminarſi aſcenderà a qualche grado minore del maſſimo, e così replicando la medeſima operazione, s'arriverà finalmente ad avere un'equazione, nella quale l'incognita aſcenderà ſolamente al primo grado; ſicchè, ſoſtituendo poi nell'una, o nell'altra delle due equazioni i valori ritrovati dell'incognita da eſterminarſi, s'avrà un'equazione, dove più non apparirà l'incognita ſuddetta.

186. Per darne alcuni eſempj, ſieno le due equazioni primitive di un problema.

1.ª $x^2 = a y + y^2$

2.da $x^3 + axy = y^3$ da ridurſi in equazione finale; ſi ſcelga la prima, come la più ſemplice, per eſterminarvi l'incognita x, e ſi moltiplichi queſt'equazione per x, affinchè nel prodotto $x^3 = axy + xy^2$ s'abbia la maſſima poteſtà di x uguale alla medeſima poteſtà, che incontraſi nella ſeconda equazione, in cui in vece di x^3 ſi ſcriverà il ſuo valore $axy + xy^2$ ricavato dalla prima, e s'avrà $axy + xy^2 + axy = y^3$, e correggendo l'eſpreſſione, e dividendo per y (§. 158.), s'avrà $2ax + xy = y^2$, e trovando in queſta il valore di x, ſarà $x = \frac{y^2}{2a+y}$. Si ſoſtituiſca queſto valore in una delle due propoſte, e per eſempio nella prima, come la più ſemplice, ſarà $\frac{y^4}{y^3 + 4ay + 4a^2} = ay + y^2$, e facendo ſparire il rotto, e riducendo l'equazione ſecondo le regole ordinarie, s'avrà $5y^2 + 8ay = -4a^2$ per l'equazione finale.

187. Sieno propoſte le due equazioni primitive di un problema.

1.a $x^2 = y^2 - ay$

2.da $x^4 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$ per avere l'equazione finale; ſi ſcelga la prima, co-

me la più ſemplice, ed, affine di eſterminare x, ſi moltiplichi queſta per x^2, s' avrà $x^4 = x^2y^2 - x^2ay$, ſoſtituiſcaſi il valore di x^4 nella ſeconda equazione, e queſta diventerà $x^2y^2 - x^2ay + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $x^3 = y^3 + yx^2$; ſi moltiplichi di nuovo la prima equazione per x, poichè la maſſima poteſtà di x ſi trova ridotta al terzo grado nella ſeconda equazione, ſarà $x^3 = xy^2 - xay$, e ſoſtituendo queſto valore nell' ultima equazione ottenuta $x^3 = y^3 + yx^2$, ſarà $xy^2 - axy = y^3 + yx^2$, o ſia $xy - ax = y^2 + x^2$. Finalmente, ſe in queſt' equazione in vece di x^2 ſi ſcriverà il ſuo valore $y^2 - ay$ dedotto dalla prima equazione, s' avrà $xy - ax = 2y^2 - ay$, ed $x = \frac{2y^2 - ay}{y - a}$; onde, ſoſtituendo queſto valore di x nella più ſemplice delle propoſte equazioni, cioè nella prima, s' avrà $\frac{4y^4 - 4ay^3 + a^2y^2}{y^2 - 2ay + a^2} = y^2 - ay$, la quale ridotta colle ſolite maniere diventa $3y^3 - ay^2 - 2a^2y = -a^3$, equazione finale del problema.

188. Siano propoſte le due equazioni primitive

1.ª $x^2 + xy + y^2 = ax$

2.da $x^4 + x^2y^2 + y^4 = cx^2$ da ridurre a

equazione finale. Per divenirvi convien oſſervare, che rieſce più facile di fare ſparire y. Si moltiplichi adunque la prima equazione per y^2, s'avrà $x^2y^2+xy^3+y^4 = axy^2$, o ſia $y^4 = axy^2 - x^2y^2 - xy^3$, ſoſtituiſcaſi queſto valore di y^4 nella ſeconda equazione, e s'otterrà $x^4+x^2y^2+axy^2 - x^2y^2 - xy^3 = cx^2$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $x^4+ay^2-y^3 = cx$. Si moltiplichi di nuovo la prima equazione per y, s'avrà $x^2y+xy^2+y^3 = axy$, o ſia $x^2y+xy^2-axy = -y^3$, ſi ſoſtituiſca queſto valore di $-y^3$ nell'ultima ottenuta equazione $x^4+ay^2-y^3 = cx$, e s'avrà $x^4+ay^2+xy^2+x^2y-axy = cx$. In queſta nuova equazione in luogo di y^2 ſi ſoſtituiſca il ſuo valore $ax-x^2-xy$ ricavato dalla prima equazione, ſarà $x^4+\overline{a+x}\times\overline{ax-x^2-xy}+x^2y-axy = cx$, o ſia $x^4+ax^2-x^3-x^2y+a^2x-axy - ax^2+x^2y-axy = cx$, e corretta l'eſpreſſione, ſarà $a^2-2ay = c$, onde $y = \frac{a^2-c}{2a}$. Soſtituendo pertanto il valore di y nella prima equazione come più ſemplice, s'avrà $x^2+\frac{a^2x-cx}{2a}+\frac{a^4-2a^2c+c^2}{4a^2} = ax$ equazione finale.

189. Sieno proposte le due equazioni primitive

1.ª $y^2 = a^2 - x^2$

2.da $x^6 + x^4 y^2 + x^2 y^4 + y^6 = a^4 x^2$ da ridursi nella finale. Si prenda la prima equazione, come la più semplice, e volendo sterminare l'incognita y, si moltiplicherà l'equazione per y^2, ed anche per y^4, e s'avranno i seguenti valori $y^2 = a^2 - x^2$, $y^4 = \overline{a^2-x^2} \times y^2$, $y^6 = \overline{a^2-x^2} \times y^4$. Si sostituiscano adunque i valori delle potestà di y nella seconda equazione, e s'avrà $x^6 + x^4 \times \overline{a^2-x^2} + x^2 \times \overline{a^2-x^2}^2 + \overline{a^2-x^2}^3 = a^4 x^2$, e fatte le attuali moltipliche, sarà $x^6 - a^2 x^4 + a^4 x^2 + a^6 - 3a^4 x^2 + 3 a^2 x^4 - x^6 = a^4 x^2$, e correggendo l'espressione, e dividendo per a^2, s'avrà $2x^4 + a^4 = 3a^2 x^2$ per l'equazione finale.

190. Collo stesso metodo si dovrà procedere, se le equazioni primitive, e le incognite in esse contenute saranno più di due.

La medesima regola serve pure per fare sparire i radicali da una proposta equazione, o come suol dirsi *per liberare l'equazione dall'Assimetria*, bastando perciò considerare ciascun termine radicale diverso;

come altrettante incognite, ſulle quali ſi faranno le operazioni additate per eſterminarle, e ridurle ad una ſola.

191. Per far vedere l'applicazione di queſta regola ſi adduce il ſeguente eſempio.

Abbiaſi l'equazione $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, per liberarla dall'affimetria, conſiderando ciaſchedun termine radicale diverſo, come un'incognita; ſia $\sqrt{ay} = z$, $\sqrt{a^2 - ay} = u$, $\sqrt[3]{ay^2} = x$, ſoſtituendo queſti valori, avremo le quattro ſeguenti equazioni particolari con quattro incognite z, u, x, y, cioè

1.ª $z - u = 2a + x$

2.da $z^2 = ay$

3.ª $u^2 = a^2 - ay$

4.ª $x^3 = ay^2$, dalle quali facendo ſparire le incognite u, z, y, s'avrà l'equazione libera dai radicali, in cui ſi troverà la ſola incognita x.

Dalla prima equazione ſi ricava $z = 2a + x + u$; onde moltiplicando tutto per z, ſarà $z^2 = 2az + xz + uz$, e ſoſtituendo queſto valore di z^2 nella ſeconda equazione $z^2 = ay$, ſarà $ay = 2az + xz + uz$, e ſcrivendo in queſta in vece di z il ſuo valore $2a + x + u$ ricavato dalla prima equazione, ſarà $ay = 4a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux + u^2$.

Eſſendo le quattro incognite ridotte alle tre u, x, y, converrà operare ſulle tre equazioni ſeguenti.

1.ª $u^2 = a^2 - ay$

2.da $x^2 = ay^2$

3.ª $ay = 4a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux + u^2$. Soſtituiſcaſi nella terza equazione il valore di $u^2 = a^2 - ay$ dedotto dalla prima, e s' avrà $ay = 4a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux + a^2 - ay$, e correggendo l' eſpreſſione, ſarà $2ay = 5a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux$, e trovando in queſta il valore di u, cioè $u = \frac{2ay - 5a^2 - 4ax - x^2}{4a + 2x}$ ſi ſoſtituirà il ſuo quadrato nell' equazione $u^2 = a^2 - ay$, e s' avrà

$$a^2 - ay = \frac{4a^2y^2 - 20a^3y + 25a^4 - 16a^2yx}{16a^2 + 16ax + 4x^2}$$
$$\frac{-4ayx^2 + 16a^2x^2 + 40a^3x + 8ax^3 + 10a^2x^2 + x^4}{16a^2 + 16ax + 4x^2}$$

e liberando l'equazione dalla frazione, e correggendo l' eſpreſſione, ſarà $4a^2y - 4a^2y^2 = x^4 + 8ax^3 + 22a^2x^2 + 24a^3x + 9a^4$. Col mezzo di tali operazioni le quattro incognite, e le quattro equazioni ſi trovano ridotte a due ſole, cioè queſt' ultima ritrovata, e l' altra $x^2 = ay^2$; e però, ſe queſt' ultima ſi moltiplicherà per

x, s' avrà $x^4 = a y^2 x$, e ſoſtituendo nell' altra equazione i valori di x^3, e di x^4, s' avrà, correggendo l' eſpreſſione, $a y^2 x + 12 a^2 y^2 + 22 a^2 x^2 + 24 a^3 x = 4 a^3 y - 9 a^4$, nella quale ſcrivendo $\frac{x^3}{a}$ in vece di y^2, e $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ in vece di y, ſarà

$4 a^3 \sqrt{\frac{x^3}{a}} = x^4 + 12 a x^3 + 22 a^2 x^2 + 24 a^3 x + 9 a^4$, e quadrando ambedue i membri, s' avrà l' equazione libera dall' aſſimetria.

192. Quale ſia poi il ripiego da uſarſi per ottenere equazioni più ſemplici, o più depreſſe, non ſi può altrimenti determinare, ſe non ſe nei caſi particolari. Tutto quello, che dire ſi può in generale, è, che col fare uſo delle proprietà delle grandezze s' ottiene ſpeſſo equazione più ſemplice, o più depreſſa di ciò ſucceda, quando s' eſprimono a dirittura le condizioni del problema in quella maniera, che ſembra più ovvia, e naturale. Per la qual coſa, dovendoſi riſolvere un problema, è neceſſario, nell' inſtituire il canone, eſaminare, ſe ciò poſſa farſi in una maniera più ſemplice coll' adoperare una, o più delle proprietà delle grandezze.

Oltre i riſcontri, che di queſto avvertimento ſi ſono già dati nel Capo antecedente, cominceremo a darne uno molto concludente nella ſoluzione del ſeguente problema, e ſe ne tratterà poi in una maniera più particolare nel Capo 5.

Trovare due numeri diſuguali, de'quali ſia dato il prodotto $= a$, e la ſomma $= c$ dei loro quadrati.

Si chiami il numero maggiore $= x$, il minore $= z$. Nell' adempiere le due condizioni del problema s' otterranno le due equazioni primitive

1.ª $x z = a$

2.da $x^2 + z^2 = c$

Se per avere l' equazione finale ſi maneggeranno le primitive in quella maniera, che ſembra più naturale, s' otterrà l' equazione finale di quarto grado $z^4 + a^2 = c z^2$ (§. 182.)

Per lo contrario, ſe le due equazioni primitive ſi maneggeranno a norma de' ripieghi dati (§. 183.), s' otterrà la finale aſſai più ſemplice $2x = \sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}$.

Se poi in vece di diſtendere il canone, come ſovra, ſi farà uſo della proprietà delle grandezze eſpreſſa nel corollario (§. 163.), cioè la maggiore di due grandezze diſuguali equivale la ſemiſomma,

più la semidifferenza, e la minor grandezza uguaglia la semisomma meno la semidifferenza, in simil caso la soluzione del problema riuscirà più semplice. Si chiami la somma de' due numeri disuguali ricercati $= 2x$, e sia la loro differenza $= 2z$, sarà il numero maggiore $= x + z$, ed il minore $= x - z$. Adempiscansi le due condizioni del problema, e s' avranno le due equazioni primitive.

1.ª $\overline{x+z}^{\frac{1}{2}} \times \overline{x-z}^{\frac{1}{2}} = x^2 - z^2 = a$

2.da $\overline{x+z}^{\frac{1}{2}} + \overline{x-z}^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + 2z^2 = c$,

le quali maneggiate a tenore del (§. 181.) somministrano l'equazione finale semplicissima $z^2 = \frac{c-2a}{4}$.

Trovare il valore dell' incognita nelle equazioni finali affette.

193. Per mezzo della dottrina, in cui si esamina la natura delle equazioni, s' arriva a conoscere originalmente il modo di maneggiarle, affine di avere il valore dell' incognita, qualunque sia il grado, cui questa trovasi elevata. Siccome questa dottrina forma una parte dell' Analisi sublime, così basterà, che in questi ele-

menti ſi tratti delle equazioni affette del ſecondo grado, e di alcuni caſi particolari delle equazioni di grado ſuperiore.

194. Qualſivoglia equazione affetta, che ſi riduce uguale al zero col far paſſare tutti i termini in un ſol membro dell'equazione, e da quella banda, in cui la maſſima poteſtà dell' incognita rieſce poſitiva, ſi può conſiderare come la poteſtà di una quantità compoſta, la quale poteſtà può eſſere perfetta, o imperfetta. Per eſempio l' equazione $x^2 + c^2 = 2cx$, eſſendo ridotta al zero, come $x^2 - 2cx + c^2 = 0$, ſomminiſtra un quadrato perfetto. Ma l'equazione $y^2 + ay = mn$, eſſendo ridotta al zero, dà una poteſtà imperfetta $y^2 + ay - mn = 0$.

Affinchè la poteſtà di un binomio ſia perfetta, aver dee un numero di termini eſpreſſo dall' eſponente della maſſima poteſtà dell' incognita accreſciuto dell' unità (§. 38.). Per la qual coſa le equazioni affette ridotte al zero non poſſono avere più di tre termini, ſe ſono del ſecondo grado, quattro, ſe ſono del terzo grado, cinque, ſe ſono del quarto grado, e così ſuſſeguentemente; dovendoſi quì notare, che nelle equazioni ſi contano per un ſol termine tutti quelli, ne' quali l' incognita

è elevata al medeſimo grado, e che tutti i termini compoſti di quantità cognite ſi contano pure per un ſolo; e così l'equazione $a x^2 - c x^2 + d^2 x = f^3 - c m^2$ ſi conſidera di tre termini, ſtantechè $ax^2 - cx^2$ contano per un ſol termine. Lo ſteſſo dire ſi dee delle due quantità cognite $f^3 - cm^2$.

195. Oltre il numero de' termini fa di meſtiere badare anche alla ſequela de' ſegni, dopo d' aver ordinata l' equazione ſecondo i gradi dell' incognita: imperciocchè, ſe la poteſtà ſarà perfetta, tutti i ſegni ſaranno poſitivi, o pure ſaranno alternamente poſitivi, e negativi; e ſi dee pure notare, che, qualunque volta i ſegni ſono alternamente poſitivi, e negativi, l' ultimo termine, che è ſempre la quantità cognita, dee eſſere poſitivo, ſe l' indice della poteſtà è un numero pari, e dee eſſo termine eſſere negativo, ſe l' indice della poteſtà ſarà un numero diſpari; il che tutto ſi deduce facilmente dalla formazione delle poteſtà (§. 38.) col ſupporre in generale un binomio $x \pm c$.

196. L' artifizio per trovare il valore dell' incognita in quelle equazioni affette, di cui trattiamo adeſſo la riſoluzione, conſiſte nel rendere poteſtà perfetta un membro dell' equazione, ove queſta non ſi

trovi tale, dopo d' eſſere ridotta uguale al zero.

197. Per applicare le date regole, ſia propoſta l' equazione $x^2 + 9 = 6x$, in cui ſi dee trovare il valore dell' incognita. Si riduca l' equazione uguale zero (§. 194.), e ordinati i termini ſecondo i gradi dell' incognita, s' avrà $x^2 - 6x + 9 = *$, nella quale ſi oſſerva, che, eſſendo 9 il quadrato di 3 metà del coefficiente 6 di x, ed eſſendo la ſequela de' ſegni alternamente poſitivi e negativi, l' equazione è un quadrato perfetto, la cui radice è $x - 3 = *$, ed $x = 3$.

Se s'abbia l'equazione $10y = -25 - y^2$, ſi ridurrà la medeſima uguale al zero col fare sì, che la maſſima poteſtà di y ſia poſitiva, e s' avrà $y^2 + 10y + 25 = *$, che ſi oſſerva eſſere un quadrato perfetto, la cui radice è $y + 5 = *$, e quindi $y = -5$.

Se l'equazione $y^3 + 108y = 18y^2 + 216$ ſi ridurrà uguale al zero, ordinandola ſecondo i gradi dell' incognita, ſi avrà $y^3 - 18y^2 + 108y - 216 = *$, che, atteſa anche l' alternativa de' ſegni, ed i valori de' coefficienti, ſi ſcorge eſſere un cubo perfetto, la cui radice è $y - 6 = *$, e $y = 6$.

Col ridurre l'equazione $z^3 + 343 = -21z^2 - 147z$ uguale al zero, e coll'ordinarla ſecondo i gradi dell' incognita, ſi ha $z^3 + 21z^2 + 147z + 343 = 0$, che, atteſo il valore de' coefficienti, e la ſequela de' ſegni, è un cubo perfetto, la cui radice è $z + 7 = 0$, e quindi $z = -7$.

Se l' equazione $x^4 + 54x^2 = 12x^3 + 108x - 81$ ſi ridurrà uguale al zero, e ſe ne ordineranno i termini ſecondo i gradi dell' incognita, s' avrà $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 = 0$, la quale, avuto il debito riguardo all' alternativa de' ſegni, ed al valore de' coefficienti, ſi riconoſce eſſere una quarta poteſtà perfetta, da cui eſtratta la radice, ſi ha $x - 3 = 0$, ed $x = 3$.

198. Se, dopo d' aver ridotta l' equazione uguale al zero, ſi trova, che l' eſpreſſione non è poteſtà perfetta, e che l' imperfezione naſce unicamente dal termine cognito, in ſimile riſcontro ſi farà paſſare queſto termine nell' altro membro, indi il coefficiente del ſecondo termine dell' equazione ordinata ſecondo i gradi dell' incognita ſi dividerà per l' eſponente della maſſima poteſtà d' eſſa incognita, e queſto quoziente ſi eleverà alla ſteſſa maſſima poteſtà, e così elevato s' aggiugnerà

in ambe le parti dell' equazione; ſe tutti i termini, ne' quali trovaſi l' incognita, avranno il ſegno più, o, ſe avranno alternamente il ſegno più e meno, il grado dell' equazione ſarà eſpreſſo da un numero pari; ma qualora, ſuſſiſtendo l' alternativa de' ſegni, il grado dell' equazione ſarà eſpreſſo da un numero diſpari, il quoziente come ſovra elevato ſi ſottrerrà in ambedue i membri dell'equazione (§. 195.), dopo del che ſi eſtrarrà la radice da ambe le parti.

199. Volendo addurre alcuni eſempi per applicare la regola dell' antecedente paragrafo, ſia propoſta l' equazione finale $x^2 + 60 = 16x$, ſiccome, dopo d'averla ridotta al zero $x^2 - 16x + 60 = 0$, ſi trova, ch' eſſa non è poteſtà perfetta, e che il difetto naſce unicamente dal termine 60, così traſportato eſſo 60 nell' altro membro, e aggiugnendo da ambe le parti 64, che è il quadrato di $\frac{16}{2} = 8$ metà del coefficiente del ſecondo termine $16x$, ſi ha $x^2 - 16x + 64 = 64 - 60 = 4$, ed eſtratta la radice quadrata da ambe le parti, ſi ha $x - 8 = \pm 2$, ed $x = 8 \pm 2$; dovendoſi ſempre prefiggere il ſegno ambiguo $\pm$ alla radice numerica, ſtantechè,

potendoſi queſta prendere poſitiva, o negativa, ſomminiſtra i due valori di $x = 8 + 2 = 10$, ed $x = 8 - 2 = 6$, giacchè ambidue queſti valori ſoddisfano alle condizioni dell'equazione.

Abbiaſi l'equazione finale $x^2 - 3x = 10$, ſiccome, dopo d'averla ridotta uguale al zero, ſi trova, che non è poteſtà perfetta, così, laſciando eſſo 10 nel ſecondo membro, s'aggiugne in ambe le parti $\frac{9}{4}$, che è il quadrato di $\frac{3}{2}$ metà del coefficiente del ſecondo termine $3x$, e ſi ha $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 10 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quadrata, ſi ha $x - \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$, ed $x = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$, cioè $x = 5$, ed $x = -2$.

L'equazione $y^2 + 7y + 12 = 0$ ſi vede eſſere poteſtà imperfetta per cauſa del numero 12, e quindi traſportando queſto termine nel ſecondo membro, ed aggiugnendo da ambe le parti $\frac{49}{4}$, che è il quadrato di $\frac{7}{2}$, ſi ha $y^2 + 7y + \frac{49}{4} = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4}$, ed eſtratta la radice quadrata,

ſi ha $y + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$, e $y = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$, cioè $y = -3$, e $y = -4$.

200. Prima d'inoltrarſi maggiormente in queſt' applicazione convien oſſervare la ſeguente equazione generica del ſecondo grado $x^2 \pm 2ax + a^2 = a^2 \pm c^2$, affine di avere un' idea diſtinta di tutte le mutazioni, che in eſſa occorrer poſſono, e delle conſeguenze, che ne derivano. In queſt' eſame ſi vede facilmente, che la quantità a^2, la quale trovaſi da ambe le parti dell' equazione, è il quadrato della metà del coefficiente del termine $2ax$, per mezzo della quale ſi riduce il primo membro in poteſtà perfetta, e ſi vede pure, che la quantità cognita $= a$, la quale s' ottiene nell' eſtrarre la radice quadrata dal primo membro, aver dee lo ſteſſo ſegno, che ha eſſo ſecondo termine. Riſpetto poi alla quantità cognita c^2, che trovaſi nel ſecondo membro dell' equazione, ſe eſſa ſarà poſitiva, o che, eſſendo negativa, ſarà minore del quadrato a^2 della metà del coefficiente, ſi dirà, che in queſto caſo i valori dell' incognita ſaranno ſempre reali, ma ſe eſſa quantità, eſſendo negativa, ſarà maggiore del diviſato quadrato, allora i valori dell' incognita ſa-

ranno immaginarj, e quindi ſaremo certi, che l'equazione involve qualche aſſurdo.

201. Per applicare la regola del §. 198. alle equazioni di grado ſuperiore al ſecondo: abbiaſi l'equazione finale $12z^2 + 48z = 665 - z^3$. Dopo d'averla reſa uguale al zero colla maſſima poteſtà dell'incognita poſitiva, e dopo d'averla ordinata ſecondo i gradi di queſta, ſi vede, che l'eſpreſſione è poteſtà imperfetta unicamente per cauſa del numero 665, il quale ſi dee laſciare nell'altro membro per avere $z^3 + 12z^2 + 48z = 665$, e aggiugnendo in ambe le parti 64, che è il cubo di $\frac{12}{3}$ terza parte del coefficiente del ſecondo termine $12z^2$, ſi ha $z^3 + 12z^2 + 48z + 64 = 665 + 64 = 729$, ed eſtratta da ambe le parti la radice cubica, ſi ha $z + 4 = 9$, e $z = -4 + 9 = 5$.

Abbiaſi l'equazione $y^3 + 108y = 559 + 18y^2$, dopo d'averla diſpoſta ſecondo i gradi dell'incognita, ſi trova, che è poteſtà imperfetta unicamente per cauſa del termine cognito (§. 38.), onde, laſciando queſto nell'altro membro, ſi leverà da ambe le parti per cauſa dell'alternativa de' ſegni, e dell'eſponente diſpari, ſi leverà, dico, il numero 216,

che è il cubo di $\frac{18}{3}$, e s'avrà $y^3 - 18y^2 + 108y - 216 = 559 - 216 = 343$, ed eſtratta la radice cubica, ſi avrà $y - 6 = 7$, e $y = 6 + 7 = 13$.

Finalmente abbiaſi l'equazione $x^5 + 90x^3 + 405x = 1267 + 15x^4 + 270x^2$, dopo d'averla ordinata ſecondo i gradi dell'incognita $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 1267 = 0$, ſi trova che, ſe ſi farà paſſare 1267 nell'altro membro, e che per cauſa dell'alternativa de' ſegni in queſt' equazione di grado diſpari ſi leverà da ambe le parti 243, che è la quinta poteſtà di $\frac{15}{5} = 3$, s'avrà una quinta poteſtà perfetta nel primo membro (§. 38.); onde ſarà $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 450x - 243 = 1267 - 243 = 1024$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quinta, ſi ha $x - 3 = 4$, ed $x = 3 + 4 = 7$.

Nella ſteſſa maniera ſi procederà per le equazioni di grado ſuperiore.

202. Occorrendo poi, che nelle equazioni di grado ſuperiore al ſecondo ridotte al zero ſi trovi, che l'eſpreſſione è poteſtà imperfetta per cauſa di qualche coefficiente dell'incognita, come $y^3 - 20y^2$

$+ 7y - 150 = o$, o pure perchè manca qualche termine, come $z^4 + 5z^2 - 30z + 150 = o$, o finalmente perchè i ſegni non ſono con quella ſequela, che ſi dee (§. 195.), converrà in ſimili riſcontri uſare le regole, che ſi danno nell'Analiſi ſublime, eccettuattone però il caſo ſeguente, ed è, quando l'equazione affetta ha tre ſoli termini, e che l'indice maſſimo dell'incognita, eſſendo eſpreſſo da un numero pari, l'eſponente dell'incognita, che ſi trova nell'altro termine, è la metà del detto eſponente maſſimo. Queſte tali equazioni ſi chiamano derivative del grado indicato dalla metà dell'eſponente maſſimo, e ſi trattano da principio come ſe foſſero di ſecondo grado, e dopo d'aver per tal mezzo trovato il valore dell'incognita elevata al grado indicato dalla metà dell'eſponente maſſimo, ſi laſcia l'incognita ſola da una parte, e ſi ha una equazione pura da riſolverſi a norma delle coſe già inſegnate nel Capo antecedente.

203. Per far pratica di queſta regola (§. 202.), ſia data l'equazione finale del quarto grado $x^4 - 20x^2 = 576$; ſi conſideri la medeſima come un'equazione di ſecondo grado, e però, preſa la metà 10

del

del coefficiente di $20x^2$, ſi quadri, e s'aggiunga da ambe le parti, e s'avrà $x^4 - 20x^2 + 100 = 576 + 100 = 676$, ed eſtratta la radice quadrata, ſarà $x^2 - 10 = \pm 26$, ed $x^2 = 10 \pm 26$, equazione pura di ſecondo grado, in cui, pigliando il valore poſitivo, ſi ha $x^2 = 36$, e quindi $x = \pm 6$; ſe poi ſi prenderà il valore negativo, ſarà $x^2 = -16$, il che fa vedere, che gli altri due valori di queſt'incognita ſono immaginarj.

Abbiaſi l'equazione finale dell'ottavo grado $y^8 - 10y^4 = 5751$; conſiderata queſta equazione come ſe foſſe del ſecondo grado, ſi aggiunga da ambe le parti 25, che è il quadrato di 5 metà del coefficiente di $10y^4$, e s'avrà $y^8 - 10y^4 + 25 = 5751 + 25 = 5776$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quadrata, ſi ha $y^4 - 5 = \pm 76$, e $y^4 = 5 \pm 76$, equazione pura di quarto grado, in cui, preſo il valore poſitivo, ſi ha $y^4 = 81$, ed eſtratta la radice quarta, ſi ha $y = \pm 3$, eſſendo poi immaginarie le radici dell'equazione $y^4 = -71$.

Sia data l'equazione finale del ſeſto grado $z^6 + 80z^3 = 303104$. Si conſideri pure come ſe foſſe di ſecondo grado, onde, aggiugnendo da ambe le parti 1600

quadrato di 40, che è la metà di 80 coefficiente del termine $80z^3$, si ha $z^6 + 80z^3 + 1600 = 303104 + 1600 = 304704$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, si ha $z^3 + 40 = \pm 552$, e quindi $z^3 = -40 \pm 552$, equazione pura, in cui, se si prende il valore positivo, si ha $z^6 = 512$, ed estratta la radice cubica, si ha $z = 8$. Se poi si prenderà il valore negativo, sarà $z^3 = -592$, e quindi $z = \sqrt[3]{-592}$, che è un valore pure reale (§. 18.), ma sordo, e negativo.

Abbiasi l'equazione finale del decimo grado $x^{10} - 36x^5 = 1011712$. Considerandola come se fosse del secondo grado, si aggiugnerà da ambe le parti 324, che è il quadrato di 18 metà del coefficiente 36, e s'avrà $x^{10} - 36x^5 + 324 = 1011712 + 324 = 1012036$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, si ha $x^5 - 18 = \pm 1006$, ed $x^5 = 18 \pm 1006$, equazione pura, in cui, pigliando il valore positivo, si ha $x^5 = 1024$, ed estratta la radice quinta, si ha $x = 4$. Se poi si prenderà il valore negativo, s'avrà $x^5 = -988$, ed estratta la radice quinta, sarà $x = \sqrt[5]{-988}$, valore pure reale, ma negativo, ed incommensurabile.

204. Se nell'eſtrarre la radice quadrata da una equazione del quarto grado derivativa dal ſecondo ſi verrà a formare un radicale, allora nel trattare ſucceſſivamente l' equazione pura, s' avranno due radicali del ſecondo grado accavallati. Se s' abbia l' equazione finale $y^4 - 304y^2 = -18496$, coll' aggiugnere il quadrato della metà del coefficiente da ambe le parti s'avrà $y^4 - 304y^2 + 23104 = -18496 + 23104 = 4608$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quadrata, ſarà $y^2 - 152 = \pm\sqrt{4608}$, ſtantechè queſto ultimo numero non è quadrato perfetto, e quindi l' equazione pura ſarà $y^2 = 152 \pm \sqrt{4608}$, ed eſtratta di nuovo la radice quadrata, ſarà $y = \pm\sqrt{152 \pm \sqrt{4608}}$.

Se in vece di queſti radicali accavallati ſi vorrà una eſpreſſione più ſemplice pel valore di y, converrà uſare la ſeguente regola coll' eſtrarre effettivamente la radice quadrata dal binomio $152 \pm \sqrt{4608}$.

205. Per capire facilmente il fondamento della regola, per cui ſi eſtrae la radice quadrata da un binomio, convien rammentarſi che, qualora ſi moltiplica in ſe ſteſſo un binomio radicale, come $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, ſi produce un altro binomio $m + n \pm 2\sqrt{mn}$,

in cui un termine rieſce razionale, e contiene la ſomma dei quadrati di $\sqrt{m}$, e di $\sqrt{n}$, e l'altro termine continua ad eſſere irrazionale, ed eſprime il doppio prodotto di $\sqrt{m}$ in $\sqrt{n}$. La medeſima coſa dire ſi dee, ſe il binomio radicale, che ſi vuole elevare al quadrato, avrà un termine razionale, come $m \pm \sqrt{n}$. Ciò premeſſo

Suppongaſi, che $m + n$ rappreſenti generalmente un binomio quadrato qualunque, in cui m eſprime il termine razionale, ed n addita il termine radicale. Suppongaſi in oltre, che $x + z$ ſia la radice quadrata d'eſſo binomio, s'avrà $x^2 + z^2 + 2xz = m + n$, e quindi $x^2 + z^2 = m$ ſaranno le quantità razionali, e $2xz = n$ ſaranno le quantità irrazionali. In queſt'ultima equazione ſi trovi il valore di $x = \frac{n}{2z}$, e ſi ſoſtituiſca nella ſeconda equazione $x^2 + z^2 = m$, s'avrà $\frac{n^2}{4z^2} + z^2 = m$, e liberando l'equazione dalla frazione, e ordinandone i termini per riſpetto all'incognita z, ſarà $z^4 - mz^2 = -\frac{n^2}{4}$, equazione del quarto grado derivativa dal ſecondo, la quale trattata a norma de' (§. 169, 170.) ſom-

miniſtra $z^2 = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{4}} = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}$

e quindi $z = \pm \sqrt{\frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$. Dalla ſeconda equazione $x^2 + z^2 = m$ ſi ricava $x = \pm \sqrt{m - z^2}$; ſicchè ſoſtituendo in queſta equazione il valore di z^2, s' avrà

$$x = \pm \sqrt{m - \frac{m}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}.$$

Si ſcorge adunque, che il termine maggiore della radice ſarà eſpreſſo per $\sqrt{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$, ed il termine minore ſarà $\sqrt{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$; dovendoſi quì oſſervare, che queſti termini della radice avranno il medeſimo ſegno, ſe quelli del binomio quadrato avranno lo ſteſſo ſegno, ed avranno ſegni diverſi, ſe tali ſaranno i ſegni del binomio quadrato.

Dalla conſiderazione di queſte due formole 1.ª $\sqrt{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$,

2.da $\sqrt{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$ ſi deduce

1.° Che ſe nel binomio propoſto, da cui ſi dee eſtrarre la radice, il termine

razionale $= m$ non ſarà maggiore dell'irrazionale $= n$, la quantità $\sqrt{m^2 - n^2}$ ſarà negativa, e quindi immaginarie le radici del binomio propoſto.

2.do Che la differenza $m^2 - n^2$ dee eſſere un quadrato perfetto, ſenza del che la radice del binomio propoſto non ſi può eſprimere con radicali ſemplici, ma convien accavallarli per neceſſità.

206. Per far vedere l'uſo delle formole dell' antecedente paragrafo ſi ripigli l'equazione (§. 204.) $y^2 = 152 + \sqrt{4608}$, e conſiderando $m = 152$, $n = \sqrt{4608}$, ſoſtituiſcanſi queſti numeri nelle formole ſuddette, e s' avrà

1.a $\sqrt{\frac{152}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23104 - 4608}} = 12$

2.da $\sqrt{\frac{152}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23104 - 4608}} = \sqrt{8}$, e quindi s'avrà $y = 12 + \sqrt{8}$, in cui il termine 12 è razionale.

Se s'abbia l'equazione $z^2 = 10 + \sqrt{84}$, da cui ſi dee eſtrarre la radice quadrata, col ſoſtituire nelle formole 10 in vece di m, e $\sqrt{84}$ in vece di n, s' avrà $z = \sqrt{7} + \sqrt{3}$ per la radice ricercata, la quale ha ambedue i termini irrazionali.

207. Allorchè nel trattare le equazioni del ſeſto grado derivative del terzo ſi

trova, che l' incognita, dopo d' eſſere depreſſa al terzo grado, è uguale a un binomio radicale, come $x^3 = 124 \pm \sqrt{14045}$, in ſimil caſo fa di meſtiere accavallare i radicali per avere il valore lineare dell'incognita, e così, eſtraendo la radice cubica da queſta equazione, s' avrà

$$x = \sqrt[3]{124 \pm \sqrt{14045}}.$$

Ove poi ſi voglia eſprimere queſta radice cubica col ſemplice radicale quadrato, cioè $x = 4 + \sqrt{5}$, fa d' uopo, per trovarlo, raccorrere ad altre regole, delle quali ſi tratta nell' Analiſi ſublime.

Si riſolvono problemi di grado ſuperiore al primo.

208. Nella Cittadella ſi dee alloggiare una brigata di Fanteria compoſta di 1530 ſoldati. Le camere per queſt' alloggio ſono tutte d' ugual capacità, e il numero di queſte ſupera di 11 quello de' ſoldati, che ſi può alloggiare in ciaſcheduna camera. Cercaſi quale ſia il numero delle camere, e quello de' ſoldati da deſtinarſi in ciaſcuna di eſſe.

Dall' eſpoſto del problema ſi ſcorge facilmente che, ſe verrà cognito il numero

de' ſoldati, che occuperanno una camera, ſi farà con ciò noto il numero di queſte, e però chiamando x il numero de' ſoldati da deſtinarſi in una camera, ſarà $x+11$ il numero delle camere, che ſi hanno per l'alloggio, e moltiplicando queſti due numeri fra di loro, s'avrà un prodotto uguale ai 1530 ſoldati da alloggiarſi, il che ſomminiſtra la ſeguente equazione finale $x\overline{x+11} = 1530$, o ſia $x^2 + 11x = 1530$, in cui, aggiugnendo il quadrato di $\frac{11}{2}$, ſi ha $x^2 + 11x + \frac{121}{4} = 1530 + \frac{121}{4} = \frac{6241}{4}$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quadrata, ſi ha $x + \frac{11}{2} = \pm\frac{79}{2}$, ed $x = -\frac{11}{2} \pm \frac{79}{2}$, e pigliando il valore di x poſitivo, ſi ha $x = 34$, e quindi il numero delle camere ſarà $34 + 11 = 45$.

Se dopo d'aver ſuppoſto $= x$ il numero de' ſoldati da deſtinarſi in una camera ſi dividerà 1530 per x, il quoziente darà il numero delle camere $= x + 11$, e quindi s'avrà queſt'altra equazione $\frac{1530}{x} = x + 11$, in cui, facendo ſparire la frazione, s'ottiene l'equazione primiera $1530 = x^2 + 11x$.

209. Tre Pellegrini compagni hanno ricevuto ll. 26 d' elemoſina in modo, che quella del ſecondo ſupera di ll. 6 il quadrato del numero ricevuto dal primo, ed il terzo ne ha conſeguite tanto come gli altri due inſieme meno ll. 10. Cercaſi quanto abbia ricevuto ciaſcuno d' eſſi.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede facilmente che, ſe ſi conoſceranno i denari del primo, ſi faranno in conſeguenza noti quelli degli altri due compagni. Pertanto ſi chiami il primo $= x$, ſarà il ſecondo $= x^2 + 6$, il terzo $= x^2 + x + 6 - 10 = x^2 + x - 4$. Col ſommare queſte tre quantità s' avrà l' equazione $x + x^2 + 6 + x^2 + x - 4 = 26$, e correggendo l'eſpreſſione, e ordinandola per l' incognita, ſarà $2x^2 + 2x = 24$, e dividendo per 2, ſarà $x^2 + x = 12$, ed aggiugnendo da ambe le parti il quadrato di $\frac{1}{2}$, ſarà $x^2 + x + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$, e quindi $x + \frac{1}{2} = \pm\frac{7}{2}$, ed $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$.

210. Due Socj, avendo intrapreſo un negozio, hanno formato un capitale di ll. 2160, col quale hanno guadagnato ll. 6120. Nel fare il ripartimento ſono

toccate al primo ll. 1260 pel guadagno di due anni, e pel ſuo capitale, ed il ſecondo ha avuto ll. 7020 pel guadagno d' anni cinque, e pel ſuo capitale. Cercaſi quale ſia il capitale, ed il guadagno d'ognuno d' eſſi.

Dall' eſpoſto del problema non ſi ſcorge così preſto la via per ridurlo a equazione. E' neceſſario pertanto di riflettere, che, ſe ſi conoſcerà il capitale del primo, ſi farà con ciò noto quello del ſecondo, e che, levando il capitale del primo dalle ll. 1260, che queſto ha ricevuto, s'ottiene il ſuo guadagno, e quindi anche il guadagno dell'altro ſocio; ma perchè queſte rifleſſioni non baſtano ancora per ridurre il problema a equazione, converrà ancora conſiderare, che il guadagno di ciaſchedun ſocio dee eſſere proporzionale al capitale, ed al tempo, che è rimaſto nella ſocietà, col qual mezzo, ſe ſi inſtituirà una proporzione, e valendoſi indi della proprietà delle proporzioni, cioè che il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto dei termini di mezzo (§. 122), s' avrà l' equazione primitiva, e finale.

Sia pertanto il capitale del primo $= x$, ſarà quello del ſecondo $= 2160 - x$, e ſarà il guadagno del primo $= 1260 - x$,

e quello del ſecondo ſarà $6120 - 1260 + x = 4860 + x$.

Inſtituiſcaſi ora la proporzione, dicendo, ſe x capitale del primo in anni 2 ha fruttato $1260 - x$, il capitale $2160 - x$ in anni 5 avrà fruttato $4860 + x$, cioè

$2 \times x : 1260 - x :: 5 \times \overline{2160 - x} : 4860 + x$,

e facendo il prodotto dei medj, e degli eſtremi, ſi ha l'equazione

$2 \times x \times \overline{4860 + x} = \overline{1260 - x} \times 5 \times \overline{2160 - x}$,

e facendo le attuali moltipliche, e maneggiando indi l'equazione ſecondo le date regole, ſi trova $x = 540$, col qual mezzo ſi hanno poi le altre coſe ricercate.

211. Un teſtatore laſcia un capitale di ll. 27000 con obbligo di diſtribuire annualmente colla rendita un'elemoſina uguale a 360 poveri nel giorno anniverſario del ſuo deceſſo. Queſta rendita è tale, che, ſe ſi divide il capitale pel quadrato dell' elemoſina da darſi a uno de' poveri, ed a queſto quoziente s' aggiungono ll. 240, ſi ha lo ſteſſo numero, che s'ottiene col dividere il quadrato della rendita pel numero de' poveri. Cercaſi quale ſia la rendita, e l' elemoſina da darſi a ciaſcun povero.

Se la rendita ſia $= y$, e l' elemoſina $= x$, ſarà 1.ª equazione $y = 360\,x$, 2.ª equa-

zione $\frac{27000}{x^2} + 240 = \frac{y^2}{360}$. Se in queſta ſeconda equazione in vece di y^2 ſi ſoſtituirà il ſuo valore ricavato dalla prima, e ſi correggerà l' eſpreſſione, s' avrà $\frac{27000}{x^2} + 240 = 360\,x^2$, e facendo ſparire la frazione, s'avrà $27000 + 240\,x^2 = 360x^4$, equazione del quarto grado derivativa del ſecondo, che maneggiata ſecondo le date regole ſomminiſtra $x = 3$, e quindi $y = 1080$.

212. Un Orefice ha poſto entro un crogiuolo parecchie once d' oro per gettare un certo lavoro. Mentre il metallo era già ſquagliato uno de' garzoni ne ha cavato fuori ſei once, e vi ha ſuppeditato altrettanto argento, di là a qualche tempo un altro garzone ha cavato dal crogiuolo ſei once del meſcuglio, e vi ha ſuppeditato altrettanto argento. Un terzo garzone ha pure levato altre ſei once di meſcuglio, che ha rimpiazzato con altrettanto argento. L' orefice, dopo d' aver gettato il lavoro, s' accorge della frode, e, fattone il ſaggio, trova che l' oro nel lavoro è ſolamente $\frac{729}{1000}$ della quantità, che poſto avea nel crogiuolo. Cercaſi quale ſia la quantità dell' oro poſta da principio.

Per ridurre queſto problema a equazione convien riflettere, che non oſtante le tre eſtrazioni la quantità della materia entro il crogiuolo è ſempre la ſteſſa per cauſa dell' argento, che vi ſi ſuppedita, e perchè queſti metalli, eſſendo liquefatti, non conſumano, e quindi che la quantità dell' oro, che incontraſi nel meſcuglio della ſeconda e terza eſtrazione, dee eſſere proporzionale a quella, che eſiſte entro il crogiuolo, quando ſi fa la cavata. Ciò poſto.

Sia $= x$ la quantità dell'oro poſta da principio entro il crogiuolo, ſarà $x - 6$ eſſa quantità dopo la prima eſtrazione, e, giacchè dopo d' aver ſuppeditato altrettanto argento ſi cavano ſei once di miſto, così per avere la quantità dell' oro contenuto in queſta cavata, ſi farà la ſeguente proporzione.

Come la quantità x della materia contenuta nel crogiuolo ſtà a 6 once di miſto cavato, così la quantità $x - 6$ d'oro, che trovaſi nel crogiuolo, ſtà al quarto termine, cioè

$x : 6 :: x - 6 : \frac{6x-36}{x}$, che è la quantità dell' oro, che ſi piglia nella ſeconda eſtrazione, e queſta ſottratta da $x - 6$, ſi ha

nell'avanzo $x - 6 - \frac{6x+36}{x} = \frac{x^2-12x+36}{x}$ l'oro, che trovaſi ancora entro il crogiuolo; nella ſteſſa maniera s'avrà la quantità dell'oro, che trovaſi nella terza eſtrazione collo inſtituire la ſeguente proporzione.

$x : 6 :: \frac{x^2-12x+36}{x} : \frac{6x^2-72x+216}{x^2}$, e queſta quantità ſottratta da quella, che trovavaſi ancora entro il crogiuolo, s' avrà $\frac{x^2-12x+36}{x} - \frac{6x^2+72x-216}{x^2} = \frac{x^3-18x^2+108x-216}{x^2}$ quantità dell' oro, che trovaſi ancora entro il crogiuolo, la quale è uguale a $\frac{729}{1000}$ della quantità del miſto eſpreſſa per x.

S'avrà adunque $\frac{x^3-18x^2+108x-216}{x^2} = \frac{729x}{1000}$

e facendo ſcomparire il rotto, ſarà

$x^3 - 18x^2 + 108x - 216 = \frac{729x^3}{1000}$.

Coll' eſaminare queſt' equazione, s'oſſerva, che ciaſchedun membro è un cubo perfetto, e però ſe ne eſtrarrà la radice prima di cercare il valore dell' incognita, e s' avrà $x - 6 = \frac{9x}{10}$, e quindi $x = 60$.

213. Nel risolvere un problema si sono ottenute le due seguenti equazioni primitive, delle di cui incognite se ne addimanda il valore.

1.ª $y^4x^4 - 10yx^3 + y^3 = \frac{256000}{y^3} + 24.$

2.ª $y^7x^4 - 10y^4x^2 + 2y^6 = 505856 + 48y^3.$

Se nel trattare queste equazioni si userà qualcheduno de' ripieghi dati per esterminare le incognite, s' arriverà facilmente alla soluzione del problema. Nel caso nostro si moltiplichi la prima equazione per y^3, e s' avrà

1.ª $y^7x^4 - 10y^4x^2 + y^6 = 256000 + 24y^3$,

la quale sottratta dalla seconda dà

$y^6 = 249856 + 24y^3$, e questa, essendo maneggiata come una equazione di secondo grado, somministra $y^3 = 12 \pm 500$, e preso il valore positivo di y^3, ed estratta la radice cubica, si ha $y = 8$.

Sostituiscasi questo valore di y nella prima equazione, e s' avrà

$$4096x^4 - 80x^2 + 512 = \frac{256000}{512} + 24,$$

la quale maneggiata nel modo solito dà

$x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{793}}{512}}$, nella quale espressione si osservano due valori reali, ed immaginarj gli altri due.

CAPO IV.

Uſare il metodo Analitico nella ſoluzione de' Problemi Geometrici.

214. Le regole, che in queſta ſeconda parte ſono già ſtate date per riſolvere i problemi numerici col metodo analitico, ſono ſenz' altro indiſpenſabili anche nella ſoluzione de'Geometrici. A queſte regole ſe ne debbono aggiugnere alcune altre particolari riſguardanti l' uſo, che ſi dee fare delle diverſe poſizioni, e delle relazioni delle linee; avvegnachè il più delle volte queſte notizie ſono indiſpenſabili per inſtituire le equazioni primitive, e per diſtendere il canone coi dovuti riguardi.

Allorchè le poſizioni delle linee, e le relazioni delle grandezze, qualunque eſſe ſieno, ſono date in modo, che per eſprimere le condizioni del problema colle equazioni non ſi eſigono altre linee ſe non ſe quelle, che ſervono per eſprimere la figura del problema, allora ne rieſce facile la ſoluzione; ma, ſe la figura del problema non ſomminiſtra tutte le linee, e gli angoli neceſſarj per riſolverla, in ſimil caſo fà di meſtiere tirare nella figura altre linee, formare angoli, e ſuperficie, e

ideare

ideare nuove combinazioni per procurarſi altri dati atti a condurci alla ſoluzione. Dall' ottima ſcelta di queſti nuovi dati, che l' Analiſta ſi procaccia col ſuo raziocinio, dipende poi la facilità di avere le equazioni primitive, per mezzo delle quali s' arriva alla finale.

Sebbene le regole, di cui ora ſi ragiona, non conducano immediatamente a trovare quel ripiego ſpecifico, che eſigeſi nella ſoluzione di ciaſchedun problema, gl' indirizzi, che quì ſi daranno, riuſciranno però molto utili ai principianti, avvegnachè coll' eſercizio ne diverrà faciliſſimo l' uſo.

Indirizzi per inſtituire il canone, e le equazioni primitive.

215. Per trovare le equazioni primitive di un problema geometrico, e diſtenderne il canone con diſcernimento ſi praticheranno le ſeguenti regole.

1.ª Si comincerà a fare la figura appartenente al problema, nella quale ſi rappreſenteranno i dati in una maniera chiara, diſtinta, e ben ordinata, e vi ſi delineeranno pure, o vi ſi noteranno le coſe ricercate, affine di ſcorgere facilmente

quali ſono le linee, gli angoli, e le ſuperficie, che neceſſariamente entrano nella ſoluzione del problema.

2.da Della deſcritta figura ſi eſamineranno tutte le parti, affine d'individuarne le affezioni, e le proprietà, e fra queſte ſcegliere quelle, che conducono alla ſoluzione immediata della queſtione, o che ne ſomminiſtrano l'avviamento.

3.a In queſt'eſame ſi procurerà di ſcoprire quelle relazioni, e proprietà delle grandezze, per mezzo delle quali s'arriva a inſtituire le equazioni primitive. Queſte ſcoperte ſi regiſtreranno, affine di ſoſtituirvi poi i valori analitici, dopo che ſi ſarà diſteſo il canone.

4.a Se nel fare queſt' eſame non ſi ſcorgerà la ſtrada immediata per inſtituire le equazioni primitive, converrà conſiderare, ſe dalle coſe date ſe ne poſſono dedurre delle altre conducenti al deſiato termine col tirare nella figura nuove linee, le cui affezioni, relazioni, e proprietà ſi oſſerveranno pure attentamente, affine di ſcoprire con queſto procedimento alcuni dati relativi all'eſpoſto nel problema, o pure ſi eſamineranno per una ſtrada diverſa le convenienze delle grandezze, che già incontranſi nella figura, per trovare una,

o più equazioni, le quali conducano poi a ſcoprire quelle altre, che ſi deſiderano, o finalmente converrà dividere in due il problema propoſto, di maniera però, che la ſoluzione del primo ſerva d'avviamento per riſolvere il ſecondo.

5.ª Terminato il diviſato eſame, e regiſtrate le proprietà idonee a ſomminiſtrare le equazioni primitive, ſi diſtenderà il canone colla maggior chiarezza, e ſemplicità poſſibile, avvertendo ſopra tutto di ſchivare le incognite ſuperflue, e procurando di denominare le grandezze in modo, che le equazioni rieſcano compoſte meno che ſi può.

216. I teoremi principali regiſtrati ne' ſei primi Libri d'Euclide, ed alcuni altri dimoſtrati nella Trigonometria ſomminiſtrano i fondamenti per inſtituire le equazioni primitive nei problemi lineari, e nei piani. Per eſempio, ognorachè ſi tratterà d'angoli, e di parallele, converrà aver preſente le propoſizioni 5, 15, 29, e 32 del Libro 1.° d'Euclide.

Se nella figura del problema s'incontrerà il triangolo rettangolo, s'avranno preſenti le ſue proprietà dimoſtrate nella 47 del primo, e nelle 8, 13, e 31 del ſeſto.

Le propoſizioni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, e 17 del Seſto ſervono per varie altre proprietà de' triangoli, qualunque eſſi ſieno, e trattandoſi in queſti di trovare il valore de' lati colla notizia degli angoli, ſi farà uſo de' teoremi trigonometrici.

In que' problemi, la cui ſoluzione dipende dalle proprietà del cerchio, ſi farà uſo delle propoſizioni 17, 20, 21, 22, 31, 32, 33, e 35 del terzo, e della 33 del ſeſto.

Qualora ſi tratterà di grandezze proporzionali, s' avranno preſenti le loro proprietà, e le diverſe maniere di argomentare dimoſtrate nel Libro quinto d' Euclide, e nel capo 5.° della prima parte.

Occorrendo, che i teoremi confacenti alle condizioni del problema non ſomminiſtrino a dirittura l' equazione, che ſi ricerca, converrà eſaminare, ſe ſi poſſono uſare due proprietà diverſe per additare la medeſima quantità con due differenti eſpreſſioni, e con queſte s' inſtituirà poi l' equazione ricercata.

217. Nel diſtendere il canone ſi uſeranno li ſeguenti indirizzi, affine di ſchivare le incognite ſuperflue, e le eſpreſſioni troppo compoſte.

1.° Se sarà data di posizione, e di lunghezza una retta KL, ed un punto G fuori di essa, s' intenderà sempre cognita la perpendicolare GF, e le rette GK, GL. Lo stesso dire si dee di un qualsivoglia triangolo GKL, di cui siano date tre cose, compresovi almeno un lato. FIGURA 1.

2.do Essendo date due, o più rette parallele, sarà pure nota la distanza, che regna fra esse; e se una, o più rette saranno date di posizione, vi si potrà sempre tirare con un dato intervallo un'altra parallela, o pure si potrà colla data retta di posizione fare un angolo addimandato.

3.° Le linee si esprimeranno con una sola lettera, come a, c, x, o pure colla somma, o colla differenza di due lettere, come $a \pm y$. Occorrendo poi, che di tre rette continuamente proporzionali la prima sia $= p$, e la seconda $= x$, la terza si potrà esprimere per $\frac{x^2}{p}$, affine di sminuire il numero delle incognite. Allo stesso fine se continuando la prima ad essere $= p$, e la terza sarà $= x$, allora quella di mezzo si potrà esprimere per $\sqrt{px}$. Nella stessa maniera se di quattro grandezze proporzionali la prima sia $= p$,

la ſeconda $= c$, e la terza $= x$, la quarta ſi potrà additare per $\frac{cx}{p}$.

4.° Nel triangolo rettangolo ſe un catetto ſia $= c$, e l'altro $= x$, l'ipotenuſa ſi potrà eſprimere per $\sqrt{c^2+x^2}$, e ſe x rappreſenterà l'ipotenuſa, e c un catetto, l'altro catetto ſi potrà eſprimere per $\sqrt{x^2-c^2}$.

5.° Le ſuperficie ſi additeranno col prodotto di due lettere ax, cf, o pure col quadrato di una ſola lettera, come a^2, y^2. Se alle due ſuperficie cd, mx ſi vorrà aſſegnare una terza proporzionale, queſta ſi potrà eſprimere per $\frac{m^2x^2}{cd}$; e ſe cd addita la prima, ed mx la terza, quella di mezzo ſi eſprimerà per $\sqrt{cdmx}$. Se ſi avranno tre ſuperficie proporzionali ad, cf, my, la quarta proporzionale ſi potrà eſprimere in queſta maniera $\frac{cfmy}{ad}$. Se alla ſuperficie az ſe ne vorrà un'altra nella proporzione di $m:n$, queſt'altra ſuperficie ſi eſprimerà per $\frac{anz}{m}$.

6.° Volendo inſtituire una equazione per mezzo del triangolo KGL rettangolo in G, ſi potrà ciò fare in due maniere,

cioè $\overline{KL}^2 = \overline{GK}^2 + \overline{GL}^2$, e sarà l'altra maniera $\overline{GK}^2 - \overline{FK}^2 = \overline{GL}^2 - \overline{FL}^2$, giacchè ciascheduno di questi membri è uguale al quadrato della perpendicolare GF.

6.° Se nel semicerchio FHG, in cui sia il diametro $FG = 2c$, e la parte $FL = x$, FIGURA II. si vorrà esprimere la perpendicolare LH, si scriverà $\sqrt{2cx - x^2}$; ma, se il valore di x si conterà dal centro K fino in L, allora, essendo $LG = c + x$, ed $FL = c - x$, sarà $LH = \sqrt{c^2 - x^2}$. Questa espressione corrisponde a quella del triangolo HLK rettangolo in L, in cui, essendo il raggio $KH = c$, e la parte $KL = x$, si ha $LH = \sqrt{c^2 - x^2}$, come al numero 5.

7.° Ognorachè di due grandezze se ne darà la somma, e la differenza, se queste si scriveranno in canone a tenore del (§. 163), le equazioni riusciranno per l'ordinario assai più semplici.

Risolvere i problemi Geometrici.

218. Data la superficie $= a^2$ del trian- FIGURA golo FGH rettangolo in G, e cognita la somma dei tre lati trovare l'ipoteuusa FH. III.

Conſiderando l' eſpoſto del problema ſi comprende facilmente, che per riſolvere la queſtione non è neceſſario di fare veruna aggiunta alla figura del problema, e che due ſono i principj, per mezzo de' quali ſi poſſono inſtituire le equazioni primitive, cioè i due fattori, che ſomminiſtrano la data ſuperficie, e la proprietà del triangolo rettangolo eſpreſſa nella propoſizione 47 del Libro 1.° d'Euclide.

Si ſcrivano pertanto queſti due principj (§. 215 n. 3), e ſi avrà

1.° $\frac{FG \times GH}{2} = a^2$

2.° $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH}$

L' eſame di queſti principj fa conoſcere, che, ſe ſi farà nota la ſomma delle rette FG, GH, ſarà con ciò anche cognito il valore di FH.

Diſtendaſi ora il canone, e ſia la ſuperficie data del triangolo $= a^2$
La ſomma de' tre lati $= c$
Le incognite $FG = x$
$GH = y$
ſarà $FH = c - x - y$.

Soſtituiſcanſi i valori analitici nel primo principio, e s' avrà l' equazione primitiva $\frac{xy}{2} = a^2$. Soſtituiſcanſi pure i valori anali-

tici nel ſecondo principio, e s' avrà la ſeconda equazione primitiva $x^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 - 2cy + 2xy + y^2$; e corretta l'eſpreſſione, ſarà 2.da $2cx + 2cy = 2xy + c^2$.

Per ridurre a equazione finale le due primitive, baſta moltiplicare per 4 la prima equazione $\frac{xy}{2} = a^2$, e ſoſtituire il valore $4a^2$ di $2xy$ nella ſeconda equazione, e ſi ha $2cx + 2cy = 4a^2 + c^2$, e dividendo per $2c$, ſi trova l'equazione finale $x + y = \frac{4a^2+c^2}{2c}$. Se queſto valore di $x + y$ ſi ſcriverà nell' eſpreſſione del canone $FH = c - x - y$, s' avrà $FH = c - \frac{4a^2 - c^2}{2c} = \frac{c^2 - 4a^2}{2c}$ pel valore ricercato dell' ipotenuſa.

Si tralaſcia di cercare i valori particolari di x, e y, giacchè non ſono addimandati nel problema.

219. Nel dato triangolo *FGH* ottuſangolo, o acutangolo inſcrivere un quadrato *KLMN* di maniera, che un ſuo lato *LN* giaccia ſul lato maggiore *FH* del triangolo. FIGURA IV.

Suppongaſi inſcritto il quadrato nel triangolo. Nell' eſaminare queſta figura ſi vedono due triangoli ſimili *FGH*, *KGM*,

e due triangoli rettangoli diſſimili *KLF*, *MNH*, i quali eſibiſcono parecchie incognite, che compongono ſoverchiamente la ſoluzione del problema. E' neceſſario adunque di tirare una qualche linea cognita, che faciliti queſta ſoluzione (§. 215 n. 4).

Dal punto *G* ſi tiri ſulla baſe *FH* la perpendicolare *GE*, queſta ſarà data (§. 217 n. 1), e ſaranno pure dati i ſegamenti *EF*, *EH* della baſe, e s' avranno in oltre per eſſa molti triangoli ſimili, per mezzo de' quali ſi potranno confrontare in più maniere i lati proporzionali. Fra queſte maniere noi ſceglieremo la ſeguente, comecchè conduca facilmente alla ſoluzione del problema.

$GE : FH :: GP : KM$,

e giacchè le rette *KM*, *KL* eſſer debbono fra loro uguali, per eſſere lati del quadrato, e che *KL* parallela alla *GE* uguaglia *PE*, così avremo l' eſpreſſione di *KM* indipendentemente dall' eſpoſto principio.

Diſtendaſi adunque il canone, e ſia

$GE = a$
$FH = c$
$GP = x$

ſarà $PE = KL = KM = a - x$, e ſoſti-

tuendo i valori analitici nel principio, ſarà $a : c :: x : a - x$, e facendo il prodotto de' medj, e degli eſtremi, ſi ha $cx = a^2 - ax$, equazione primitiva, e finale, la quale riſolta dà $x = \frac{a^2}{a+c}$.

220. Sulla data retta FH preſa per ipotenuſa deſcrivere un triangolo rettangolo, il quale abbia i tre lati in continua proporzione geometrica. FIGURA III.

Suppongaſi deſcritto il triangolo FGH rettangolo in G, in cui ſia GH il lato mezzano, ed FG il minore. Per riſolvere il problema ſi vede facilmente, che i due principj neceſſarj conſiſtono nella proprietà della proporzione continua, ed in quella del triangolo rettangolo; ſi ſcriva adunque il primo principio

$$FH : GH :: GH : FG,$$

e ſi ſcriva pure il ſecondo

$$\overline{FH}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{FG}^2$$

Dall' eſpoſto del problema ſi vede facilmente, che i due catetti ſono le incognite. Inſtituiſcaſi adunque il canone, e ſia

$$FH = a$$
$$GH = x$$
$$FG = y$$

Sostituiscansi i valori analitici nel primo principio, e sarà $a : x :: x : y$, e quindi $ay = x^2$ equazione primitiva.

Sostituiscansi i valori analitici nel secondo principio, e s' avrà $a^2 = x^2 + y^2$, seconda equazione primitiva, in cui, se in vece di x^2 si scriverà il suo valore ay ricavato dalla prima, s' avrà l' equazione finale $a^2 = ay + y^2$; e operando a norma de' §. 198, 199, e 200, s' avrà $a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + ay + y^2$, ed estratta la radice quadrata, sarà $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$, e quindi $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

Se la retta data fosse il lato minore FG, allora, facendo nel canone $FG = a$, $GH = x$, $FH = y$, s' avrebbero le due equazioni primitive

1.ª $ay = x^2$

2.da $a^2 + x^2 = y^2$, e sostituendo in questa ultima ay in vece di x^2, si ha la finale $a^2 + ay = y^2$, la quale, risolta come sovra, somministra $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

FIGURA III. 221. Se del triangolo rettangolo FGH rettangolo in G, che ha i lati in continua proporzione geometrica, sarà data

ſolamente la ſuperficie, in ſimil caſo converrà all' uſo de' due principj addotti nell' antecedente paragrafo aggiugnere quello de' fattori, per cui ſi ha la ſuperficie.

Diſtendaſi il canone, e ſia

La ſuperficie del triangolo $= c^2$

Il lato minore $FG = x$

Il mezzano $GH = y$

L' ipotenuſa $FH = z$

ſarà il primo principio

$FG : GH :: GH : FH$

il 2.do principio $\overline{FH} = \overline{GH} + \overline{FG}^2$

il 3.° principio $\frac{GH \times FG}{2} = c^2$.

Soſtituiſcanſi in queſti principj i valori analitici, e s' avranno le tre equazioni primitive.

1.ª $xz = y^2$

2.da $z^2 = y^2 + x^2$

3.ª $\frac{yx}{2} = c^2$.

Si trovi nella prima il valore di $x = \frac{y^2}{z}$, e in vece di x ſi ſoſtituiſca il ſuo uguale $\frac{y^2}{z}$ nelle altre equazioni, e ſi avranno le due derivative

2.da $z^2 = y^2 + \frac{y^4}{z^2}$.

3.a $\frac{y^3}{2z} = c^2$, e $z = \frac{y^3}{2c^2}$.

Se queſto valore di z ſi ſoſtituirà nella ſeconda equazione, s' avrà

$\frac{y^6}{4c^4} = y^2 + \frac{y^4}{\frac{y^6}{4c^4}}$, o ſia, corretta l'eſpreſſione, $y^8 = 4c^4y^4 + 16c^8$, equazione finale, la quale trattata a norma de' §. 198, 203 ſomminiſtra $y^4 = 2c^4 \pm 2c^4\sqrt{5}$, e $y = \sqrt[4]{2c^4 \pm 2c^4\sqrt{5}}$. Col ſoſtituire poi queſto valore nella equazione $z = \frac{y^3}{2c^2}$ s' avrà l'ipotenuſa, e mediante queſta, ed il valore di y s' avrà poi quello di x, il tutto a norma di quanto s' è inſegnato nella ſoluzione de' problemi numerici.

222. Nel cerchio del diametro cognito FK ſi è tirata dal centro H la retta cognita HL, che divide la corda KE pel mezzo in L. La tangente KG è ſegata in G dalla FG parallela alla KE. Cercaſi il valore del rettangolo fatto dalla KG nella KL.

FIGURA V.

Dopo d' aver deſcritta la figura del problema, ſi rifletre che, cadendo FK ſulle parallele FG, KE, fa uguali gli

angoli alterni KFG, FKE, e che la retta HL, la quale divide per mezzo la corda KE, rieſce perpendicolare ſopra di queſta, e quindi ſono ſimili i triangoli rettangoli FKG, KLH.

La proprietà de' triangoli ſimili ſomminiſtra la proporzione

$FK : KG :: KL : HL$,

e la proprietà del triangolo rettangolo ſomminiſtra $\overline{KH}^2 - \overline{HL}^2 = \overline{KL}^2$.

A mente di queſti due principj ſi diſtenda il canone, e ſia

$HK = HF = a$

$HL = c$

ſarà $FK = 2a$

$KL = x$

$KG = y$

Soſtituiſcanſi i valori analitici nel primo principio, e s' avrà

$2a : y :: x : c$, e per la proprietà delle grandezze proporzionali s' avrà $2ac = xy$, prima equazione primitiva.

Soſtituiſcanſi pure i valori analitici nel ſecondo principio, e s' avrà $a^2 - c^2 = x^2$, ſeconda equazione primitiva. Se nella prima ſi trova il valore di $x = \frac{2ac}{y}$, e queſto ſi ſoſtituiſce nella ſeconda, ſi ha l'equa-

zione finale $a^2 - c^2 = \frac{4a^2c^2}{y^2}$, e quindi

$y^2 = \frac{4a^2c^2}{a^2-c^2}$, e $y = \sqrt{\frac{4a^2c^2}{a^2-c^2}}$.

Si dee quì osservare, che dall' esposto del problema, essendo noti gli angoli alterni KFG, FKL, si può colla Trigonometria trovare a dirittura il valore delle KL, KG.

223. L'indefinita GK forma colla data FIGURA VI. FG l'angolo acuto KGF cognito. Si cerca nella GK un punto H, dal quale tirata la FH sia FH a GH nella data ragione di $m:n$.

Dall' esposto del problema non appare la maniera di risolverlo; onde nella proposta figura converrà tirare qualche linea cognita, che formi una qualche figura nuova (§. 215 n. 4). A tal fine dal punto F si tiri FD perpendicolare alla GK; siccome la retta FG, e l'angolo G sono cogniti, così saranno (§. 217 n. 1) anche noti i lati FD, GD. Si esamini ora, se FD stà a GD, come $m:n$; se ciò succede, il problema è già risolto.

Se poi la ragione di FD a GD sarà minore di quella di $m:n$, converrà riflettere, che in simil caso il punto H, in

cui

cui s'incontrerà l'uguaglianza fralle due ragioni, dovrà eſſere tra i punti G, D, e ſe la ragione di FD a GD ſarà maggiore della data, il punto H ſarà da D verſo K.

Suppongaſi ora, che riſulti queſt'ultimo caſo, converrà ſcrivere la condizione del problema $FH : GH :: m : n$, e s'avrà un principio.

Si oſſervi poi, che nel triangolo FDH rettangolo in D ſi trovano compreſe le due linee, che ſi ricercano; onde per mezzo della proprietà di queſto triangolo ſi avrà l'altro principio $\overline{FH}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{DH}^2$;

Inſtituiſcaſi ora il canone, e ſia

$FD = a$
$DG = c$
$FH = x$
$GH = y$

ſarà $DH = y - c$

Soſtituiſcanſi i valori nel primo principio, e ſarà $x : y :: m : n$, e quindi $nx = my$ equazione primitiva.

Soſtituiſcanſi i valori analitici nel ſecondo principio, e s'avrà $x^2 = a^2 + y^2 - 2cy + c^2$, ſeconda equazione primitiva; ſe nella prima ſi prenderà il valore di

$x = \frac{my}{n}$, e si sostituirà nella seconda, s' avrà l'equazione finale $\frac{m^2y^2}{n^2} = a^2 + y^2 - 2cy + c^2$, la quale maneggiata secondo le note regole, e supposto $m < n$, darà

$$y = \frac{cn^2}{n^2-m^2} \pm \sqrt{\frac{c^2n^4 - a^2n^2n^2 - c^2n^2}{n^4-2n^2m^2+m^4}\left(n^2-m^2\right)},$$

in cui i valori saranno immaginarj, ognorachè la quantità sotto il segno riuscirà negativa.

224. Le due rette indefinite KL, KH concorrenti in K sono date di posizione. FIGURA VII. Dal punto G fuori di esse si vuol tirare una retta GF, la quale nel segare KH in D faccia il triangolo KDF uguale alla data superficie mn.

Questo problema ha due casi, avvegnachè il punto G può essere fuori dell' angolo HKL, o essere compreso in quest' angolo. Noi principieremo a risolvere il primo caso.

Dall' esposto del problema espresso nella figura nulla si vede, che conduca immediatamente alla soluzione; fa d' uopo adunque tirare delle linee, e formare altre figure (§. 215 n. 4). Dal punto D si concepisca tirata DE perpendicolare al-

la KL, e dal punto G si tiri GP perpendicolare alla detta KL prolungata verso Q, se fia di bisogno, s'avranno i due triangoli simili DEF, GPF, essendo in quest' ultimo note le rette GP, PK; ma perchè nel confrontare essi due triangoli s' incontrano le due incognite FE, ED, e che nel cercare la superficie del triangolo KDF s' incontra un' altra incognita KF, così converrà tirare ancora altre linee.

Dal punto G si tiri GQ parallela alla KH, s' avranno i triangoli simili GQF, DKF, per mezzo de' quali s'arriverà alla soluzione del problema colle sole incognite KF, DE.

Il primo principio si ha dalla seguente proporzione de' triangoli simili

$$QF : GP :: KF : DE$$

Il secondo principio consiste nei fattori KF, DE, i quali somministrano la superficie del triangolo KDF.

Instituiscasi adunque il canone, e sia

$$QK = a$$
$$GP = c$$
$$KF = x$$
$$DE = y$$

sarà $QF = a + x$.

Col ſoſtituire queſti valori analitici nel primo principio ſi ha $a + x : c :: x : y$, e quindi $cx = ay + xy$, equazione primitiva.

Soſtituiſcanſi i valori analitici nel ſecondo principio, e s'avrà $\frac{xy}{2}$ per la ſuperficie del triangolo KDF; ma queſta per l' eſpoſto del problema è uguale ad mn, adunque s'avrà $\frac{xy}{2} = mn$ per la ſeconda equazione primitiva, in cui, facendo $y = \frac{2mn}{x}$, e ſoſtituito queſto valore di y nell' altra, s' avrà l' equazione finale $cx = \frac{2amn}{x} + 2mn$, o ſia $x^2 - \frac{2mnx}{c} = \frac{2amn}{c}$ da trattarſi nel modo ſolito.

Sia poi nel ſecondo caſo il punto G compreſo nell' angolo HKL, come nella fig. 8. In ſimil riſcontro ſi farà la coſtruzione come prima, e valendoſi degli ſteſſi principj, ſi diſtenderà lo ſteſſo canone, in cui non s' incontrerà altro divario, fuorchè nel valore di QF, che ſi eſprimerà per $x - a$, e l'equazione finale ſarà $cx = 2mn - \frac{2amn}{x}$.

FIGURA VIII.

Si dee quì notare che, ſe il punto G cadeſſe nella KH, allora la quantità a ſarebbe zero, e quindi il termine $\pm \frac{2amn}{x}$ dell' equazione finale ſcomparirebbe; onde queſta ſarebbe ridotta alla ſeguente $cx = 2mn$, ed $x = \frac{2mn}{c}$.

225. Nel triangolo ſcaleno FGH rettangolo in G è data la differenza FL fra i ſegamenti FK, KH della baſe formati dalla perpendicolare GK, ed è pure data la differenza FP fra i due catetti GF, GH, trovare la lunghezza di ciaſchedun lato. FIGURA IX.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che i principj per inſtituire le equazioni primitive ſono le proprietà del triangolo rettangolo, e ſiccome dallo ſteſſo eſpoſto ſi vede, che due ſono le incognite; così convien maneggiare eſſe proprietà in due diverſe maniere. Uno di queſti principj ſomminiſtra l' equazione primitiva $\overline{FH}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2$.

La ſteſſa proprietà maneggiata in queſt' altra maniera ſomminiſtra un' altra equazione primitiva $\overline{FG}^2 - \overline{FK}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{KH}^2$.

Inſtituiſcaſi adunque il canone, e ſia

$FP = a$

$FL = c$

$GH = GP = x.$

$FH = y.$

ſarà $FG = x + a$, e ſiccome dei due ſegamenti della baſe ſi ha la ſomma $= y$, e la differenza $= c$, così il ſegamento maggiore FK ſarà $= \frac{y+c}{2}$, ed il minore KH ſarà $= \frac{y-c}{2}$ (§. 163).

Soſtituiſcanſi ora i valori analitici nel primo principio, e s' avrà $y^2 = x^2 + 2ax + a^2 + x^2$, o ſia $y^2 = 2x^2 + 2ax + a^2$, e ſoſtituendo i valori analitici nel ſecondo, s' avrà $x^2 + 2ax + a^2 - \frac{y^2 - 2cy - c^2}{4} = x^2 \frac{-y^2 + 2cy - c^2}{4}$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $2ax + a^2 = cy$. Preſo in queſt' equazione il valore di $y = \frac{2ax+a^2}{c}$, e ſoſtituito in vece di y^2 nella prima, ſi ha l'equazione finale $\frac{4a^2x^2 + 4a^3x + a^4}{c^2} = 2x^2 + 2ax + a^2$ da maneggiarſi ſecondo le date regole.

Si dee quì oſſervare, che la ſeconda equazione primitiva $2ax + a^2 = cy$ ſi può ottenere a dirittura per un' altra ſtrada. Suppongaſi fatto $KL = KH$, e tirata la GL, s' avranno le tre rette uguali GH, GL, GP. Pertanto, ſe dal centro G ſi deſcriverà coll' intervallo GH il cerchio $HLPQ$, queſto paſſerà per li punti L, P. Se ſi prolunga PG ſino all' incontro Q della circonferenza, s' avrà per la proprietà del cerchio queſt' altro principio. Il rettangolo di FQ nella FP uguale al rettangolo di FH nella FL; e giacchè $PQ = 2x$; così ſoſtituiti i valori analitici, s' avrà $\overline{a+2x} \times a = y \times c$, cioè $2ax + a^2 = cy$.

226. Se il triangolo ſcaleno ſarà ottuſangolo in G, o pure acutangolo, in ſimil caſo per determinare il problema ſarà neceſſario di aggiugnervi un' altra condizione.

Suppongaſi, che per queſta condizione ſia data la differenza $= d$ fra il lato GH, e la perpendicolare GK, onde queſta ſia eſpreſſa per $x - d$, converrà ſervirſi dell' equazione primitiva $2ax + a^2 = cy$, e per avere l' altra ſi farà uſo della proprietà del triangolo rettangolo GKH, avvegnachè in queſto s' incontra una eſpreſſione

più ſemplice $\overline{GH} = \overline{GK}^2 + \overline{KH}^2$, e ſcrivendo i valori analitici, ſarà $x^2 = x^2 - 2dx + d^2 + \frac{y^2 - 2cy + c^2}{4}$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $8dx = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$.

Se nell'altra equazione primitiva $2ax + a^2 = cy$ ſi troverà il valore di $x = \frac{cy - a^2}{2a}$, e ſi ſoſtituirà in queſt'ultima, s' avrà l'equazione finale $8d \times \frac{cy - a^2}{2a} = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$ da trattarſi colle date regole.

Coſtruire geometricamente i valori dell' incognita ottenuti nella riſoluzione dell' equazione finale.

227. Ridotti i problemi geometrici a equazione finale, e queſta riſolta a norma delle regole ſpiegate in queſta ſeconda parte, d' uopo è convertire in linee le eſpreſſioni algebraiche. Queſt' operazione ſi dice *coſtruire geometricamente l' equazione.*

I principj, ed i maneggi da praticarſi in queſte coſtruzioni ſono i ſeguenti.

228. Nelle equazioni di primo grado il valore dell' incognita dee eſſere ridotto a queſta eſpreſſione ſempliciſſima $x = \pm a$.

Se nel riſolvere l'equazione s'otterrà queſta forma, non ſarà neceſſario di fare alcuna coſtruzione, ma, ſe l'eſpreſſione conterrà due, o più lettere cognite, ſi opererà come ſegue.

Abbiaſi da coſtruire l'equazione $y = a \pm c$, ſi tira una retta indefinita KL, e preſo in eſſa un punto K ad arbitrio, ſi nota da K in H la lunghezza $KH = a$, e, ſe la lettera c avrà il ſegno più, ſi farà $HI = c$, onde ſarà $KI = y = a + c$, da eſprimerſi con una lettera diverſa, e per eſempio $= K$: ſe contrariamente c avrà il ſegno negativo, ſi farà $HO = c$; onde ſarà $KO = y = a - c = d$ altra lettera diverſa. Nella ſteſſa maniera ſi coſtruirà l'equazione $z = 5a \pm 7d$; imperciocchè baſterà fare KH cinque volte la linea $= a$, e ſe $7d$ ſarà poſitivo, ſi farà HI ſette volte la linea $= d$, onde s'avrà $KI = z = 5a + 7d = c$. Se poi $7d$ ſarà quantità negativa, ſe ne porterà la ſua eſtenſione da H in O, e ſarà $KO = 5a - 7d = f$. FIGURA X.

Occorrendo, che la lunghezza $7d$, oltrepaſſando il punto K, arrivi in P, allora ſarà negativo il valore $KP = z = 5a - 7d = -f$. Queſta ſteſſa rifleſſione ha luogo per l'equazione $y = a - c$; dovendoſi quì oſſervare, che i Geometri hanno

in coſtume di notare i valori poſitivi dalla ſiniſtra verſo la deſtra, come da K verſo L, ed i negativi dalla deſtra verſo la ſiniſtra, come da K verſo P.

Per coſtruire l' equazione $x = \pm \frac{3c}{2}$ baſta fare una retta tripla della c, e prenderne la metà per avere il valore di x.

229. Le equazioni del primo grado, che s' incontrano più compoſte, poſſono eſſere ridotte alle ſeguenti eſpreſſioni

1.ª $y = \pm \frac{ac}{d}$, 2.da $z = \pm \frac{acf}{dg}$, 3.ª $x = \frac{abc}{m^2 \pm n^2}$, 4.ª $y = \frac{dcf^2 \pm a^2bg}{c^2m + hgn}$.

Per coſtruire la prima equazione $y = \pm \frac{ac}{d}$ conviene trovare una quarta proporzionale alle tre rette date d, a, c nel modo inſegnato nella Geometria, facendo per eſempio $KH = d$, $KL = a$, e, dopo d' aver tirata KP, la quale forma colla KL un angolo qualſivoglia, ſi fa $KG = c$, e, tirando dal punto L la retta LP parallela alla GH, ſi ha $KP = y = \pm \frac{ac}{d}$ da eſprimerſi con un' altra lettera diverſa, e per eſempio per $\pm f$; onde ſarà $y = \pm \frac{ac}{d}$

FIGURA XI.

$= \pm f = KP$ quarta proporzionale.

La ſteſſa coſtruzione avrà luogo, ſe s' incontrerà l'equazione $y = \pm \frac{a^2}{d}$, trattandoſi in queſto caſo di trovare una terza proporzionale alle due rette date d, a. Il tutto conformemente alle coſe già dette (§. 217 n. 3)

230. Se per coſtruire la ſeconda equazione (§. 229) $z = \pm \frac{acf}{dg}$ ſi ſcriverà la medeſima in queſt'altra maniera $z = \pm \frac{ac}{d} \times \frac{f}{g}$, ſi vedrà toſto, che l' eſpreſſione $\frac{ac}{d}$ è una quarta proporzionale, la quale a tenore dell' antecedente paragrafo ſi può eſprimere per un' altra lettera cognita, e per eſempio $\frac{ac}{d} = b$; ſi ſcriva adunque b in vece di $\frac{ac}{d}$, e s' avrà $z = \pm \frac{bf}{g}$, cioè z quarta proporzionale alle tre rette date g, b, f, che ſi eſprimerà per p, onde $z = \pm p$.

Nella ſteſſa maniera ſe il valore dell' incognita ſarà più compoſto, come $z = \frac{acfh}{dgl}$, baſterà ſcriverlo come ſovra $z = \frac{ac}{d} \times \frac{f}{g} \times \frac{h}{l}$;

quindi in vece di $\frac{ac}{d}$ si scriverà b, e sarà $z = \frac{bf}{g} \times \frac{b}{l}$, e scrivendo p in vece di $\frac{bf}{g}$, s' avrà $z = \frac{pb}{l}$ quarta proporzionale, che espressa per q darà $z = q$.

Occorrendo, che s' abbia un maggior numero di lettere nel numeratore, e nel denominatore, si continuerà a procedere nello stesso modo, per mezzo del quale si escludono anche le quantità espresse in forma di rotto.

231. Volendo semplificare in un' altra maniera le equazioni $z = \frac{acf}{dg}$, $x = \frac{b^2dK^2}{m^2fg}$ ec. convien nel denominatore sostituire una, o più delle lettere, che sono nel numeratore, e indi correggere l' espressione. A tal fine si rifletta, che nell'equazione $z = \frac{acf}{dg}$ il denominatore dg rappresenta un rettangolo, e che in sua vece se ne può sostituire un altro uguale, il quale abbia per lato una delle lettere del numeratore, e per esempio f. Suppongasi adunque $dg = fm$, sarà $\frac{dg}{f} = m$, vale a dire che, trovando una quarta proporzionale alle tre date f, d, g,

s' avrà il valore cognito di m (§. 229.). Si ſcriva adunque fm in vece di dg nella equazione $z = \frac{acf}{dg}$, e s'avrà $z = \frac{acf}{fm}$, e correggendo l' eſpreſſione, ſarà $z = \frac{ac}{m}$, cioè z quarta proporzionale alle tre date m, a, c.

Nella ſteſſa maniera, ſe l' equazione ſarà più compoſta, e per eſempio $z = \frac{acfh}{dgl}$, per ridurla a eſpreſſione più ſemplice ſi ſcriverà $z = \frac{acf}{dg} \times \frac{h}{l}$; ſi trasformi il rotto $\frac{acf}{dg}$ nell' altro $\frac{acf}{fm}$, e corretta l'eſpreſſione ſi regiſtrì nell' equazione, s' avrà $z = \frac{ac}{m} \times \frac{h}{l} = \frac{ach}{ml}$. Per ſemplificare ora queſt' ultima eſpreſſione, ſuppongaſi come prima un rettangolo, il quale abbia una delle lettere del numeratore, e per eſempio c, e ſia queſto uguale al dato ml, ſarà $ml = cn$, e quindi $\frac{ml}{c} = n$, quarta proporzionale alle tre rette date c, m, l. Soſtituiſcaſi cn in vece di ml nell'equazione, e s'avrà $z = \frac{ach}{cn}$, e, corretta l'eſpreſſione, ſarà $z = \frac{ah}{n}$, quarta proporzionale

(§. 229) alle tre date n, a, h, che si esprimerà per q, onde $z = q$.

La stessa operazione servirà, allorchè l'equazione avrà un maggior numero di lettere nel numeratore, e nel denominatore.

232. Allorchè il denominatore avrà due termini, come nella terza equazione $x = \frac{abc}{m^2 \pm n^2}$ (§. 229), si troverà il valore dell'incognita col trasformare un termine del divisore in modo, che contenga una lettera di quelle, che sono nell'altro termine (§. 231). Per esempio si trasformerà il termine n^2 in un altro eguale, che abbia la lettera m; se sia per esempio $n^2 = mp$, sarà $\frac{n^2}{m} = p$ terza proporzionale alle due rette date m, n; sostituendo adunque mp in vece di n^2 nell'equazione $x = \frac{abc}{m^2 \pm n^2}$, s'avrà $x = \frac{abc}{m^2 \pm mp} = \frac{abc}{m \times m \pm p}$ e facendo $m \pm p = q$ (§. 228), sarà $x = \frac{abc}{mq}$ da trattarsi a norma del §. 230, affine di avere il suo valore in una sola linea $= K$.

Nella stessa maniera si dovrà procedere, se il denominatore del rotto avrà più di

due termini; e per esempio se sia $z = \frac{abc}{m^2+n^2+gf}$ basterà convertire i due termini n^2, fg in due altri uguali, che abbiano la lettera m, facendo per esempio $n^2 = mK$, $fg = ml$, e sostituendo nell'equazione questi termini trasformati, sarà $z = \frac{abc}{m^2+mK+ml} = \frac{abc}{m \times m+K+l}$ e facendo $m+K+l = q$, sarà $z = \frac{abc}{mq}$ da ridursi in una sola linea.

233. Per ultimo, se s'abbia la quarta equazione (§. 229) $y = \frac{dcf^2 \pm a^2bg}{c^2m+bgn}$, nella quale si ha più di un termine nel numeratore, basterà in simil riscontro disgiugnere essi termini, come segue $y = \frac{dcf^2}{cm+bgn} \pm \frac{a^2bg}{c^2m+bgn}$, indi si tratterà ciaschedun rotto separato, come s'è fatto nell'antecedente paragrafo, finchè il valore dell'incognita sia ridotto a una linea semplice.

Per esempio se nel rotto $\frac{cdf^2}{c^2m+bgn}$ si farà (§. 231) $bg = cK$, s'avrà $\frac{dcf^2}{c^2m+cKn} = \frac{df^2}{cm+Kn}$; e se nel rotto $\frac{a^2bg}{c^2m+bgn}$ si farà

$cm = gl$, s' avrà $\frac{a^2bg}{cgl + hgn} = \frac{a^2b}{cl + hn}$, onde sarà $y = \frac{df^2}{cm + Kn} \pm \frac{a^2b}{cl + hn}$, e trattando indi ciascun rotto separatamente, come s' è fatto nell' antecedente paragrafo per ridurne il valore in una sola linea cognita, s'avrà $y = p \pm q = r$ (§. 228).

234. Se col mezzo delle fatte premesse si vorrà costruire il valore di $FH = \frac{c^2 - 4a^2}{2c}$ ottenuto nella soluzione del problema (§. 218), basterà disgiugnere i termini in due rotti, e sarà $FH = \frac{c^2}{2c} - \frac{4a^2}{2c} = \frac{c}{2} - \frac{2a^2}{c}$, di maniera che, dopo d' aver trovato una quarta proporzionale alle tre rette c, a, $2a$, se questa quarta si sottrerrà dalla metà di c, l' avanzo espresso per la lettera diversa p sarà il valore di $FH = p$.

E così ancora per costruire l'equazione $x = \frac{a^2}{a+c}$ ottenuta nella soluzione del problema (§. 219), basterà trovare una terza proporzionale alle due rette $a + c$, ed a.

235. Negli esempj addotti delle equazioni di primo grado il valore dell'incognita era espresso da lettere indicanti una linea. Ma se occorra, che il valore venga additato dal prodotto di due, o più lettere, come $x = ab$, o $y = c^2d$ ec., in questo caso è segno certo, che nel distendere il canone non sono state espresse le quantità in una maniera conveniente, vale a dire che le linee non sono state registrate con una sola lettera, le superficie col prodotto di due lettere, i solidi col prodotto di tre lettere ec.

Per costruire questi valori fa d'uopo scegliere una lunghezza arbitraria per l'unità, colla quale si pareggeranno poi le altre rette date nel problema.

Che la lunghezza esprimente l'unità sia arbitraria in ciascun problema si osserva cotidianamente nelle solite maniere di misurare, avvegnachè per fare queste misure si usa indifferentemente il trabucco, la tesa, il pieliprando, il piede d'Inghilterra, il braccio Milanese, il palmo Romano ec., le quali unità sono tutte fra loro diverse, e la sola avvertenza, che si ha in questo procedimento, consiste nell'adoperare la stessa unità, allorchè si debbono pareggiare le grandezze.

Ciò posto, per rendere lineare l' espressione $x = ab$ senza alterare il valore dei dati del problema, si scriverà $x = \frac{ab}{1}$, vale a dire che x è quarta proporzionale alla lunghezza presa arbitrariamente per l'unità, ed alle due rette a, b date nel problema. L' espressione $y = c^2d$ si scriverà in quest' altra maniera $y = \frac{c^2d}{1 \times 1} = \frac{c^2}{1} \times \frac{d}{1}$ da trattarsi poi a norma del §. 230.

Occorrendo, che l'equazione fosse $z = \frac{a}{a}$, allora si fa chiaro, che z uguaglia l'unità, la cui lunghezza sarà pure arbitraria, se non sarà già stata vincolata nelle condizioni del problema.

236. Nelle equazioni composte addotte (§. 229) si osserva, che il numeratore del rotto ha sempre una dimensione di più del denominatore, la qual cosa è conforme all'espressione, che si conviene alla terza, ed alla quarta proporzionale; ma, qualora s' incontra qualche equazione, in cui questa legge non è osservata, è anche segno certo, che non si è distesso il canone colle dovute avvertenze.

In questo riscontro fa d' uopo moltiplicare il numeratore, od il denominatore

tante volte per l'unità, finchè s'arrivi a ſegno di avere nel numeratore una dimenſione di più di quelle, che ſono nel denominatore; e così l'equazione $x = \frac{abc}{d}$ ſi ſcriverà $x = \frac{abc}{1 \times d}$, l'equazione $y = \frac{m^3 n^2}{ac}$ ſi ſcriverà $y = \frac{m^3 n^2}{1 \times 1 \times ac}$, l'equazione $z = \frac{dfg^2}{am - nc}$ ſi ſcriverà $z = \frac{dfg^2}{1 \times am - 1 \times nc}$, l'equazione $x = \frac{cd}{gf}$ ſi ſcriverà $x = \frac{1 \times cd}{gf}$, l'equazione $y = \frac{bg}{a^3 mn}$ ſi ſcriverà $y = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times bg}{a^3 m n}$, e così di altre.

Tutte queſte eſpreſſioni ſi maneggeranno poi colle regole quì avanti date, affine di ridurre il valore dell'incognita a una ſola linea.

237. Nelle equazioni finali pure del ſecondo grado, dopo che ſi ſono fatti paſſare tutti i termini cogniti da una banda per laſciare l'incognita ſola nell'altro membro, convien ridurre tutti eſſi termini in un ſolo, di maniera che l'equazione ſia ridotta a una di queſte due eſpreſſioni ſempliciſſime 1.ª $x^2 = a^2$, 2.ª $y^2 = bc$. Nella prima di queſte equazioni baſterà eſtrar-

re la radice quadrata, e s'avrà $x = \pm a$, e nella ſeconda ſi troverà una proporzionale di mezzo fralle due rette b, c, e s'avrà $y = \pm \sqrt{bc}$ (§. 217 n. 3): notandoſi, che, ſe la quantità cognita ſarà negativa, i valori dell'incognita ſaranno immaginarj (§. 18)

238. Per applicare l'addotta regola ai caſi particolari (§. 237) ſuppongaſi, che la quantità cognita abbia diverſi termini eſpreſſi in forma di quadrato, come $z^2 = d^2 \pm f^2 \pm g^2$; ſe quèſti avranno il ſegno più, ſi ſommeranno inſieme geometricamente per mezzo della proprietà del triangolo HKL rettangolo in K, poichè, facendo $KL = d$, $KH = f$, ſarà l'ipotenuſa HL il lato del quadrato $= d^2 + f^2$ da eſprimerſi con un'altra lettera, e per eſempio $= m^2$; s'alzi in ſeguito HP perpendicolare ſull'ipotenuſa HL, e ſi faccia $HP = g$, ſarà PL il lato del quadrato uguale $m^2 + g^2 = n^2$, e quindi $z = n = PL$.

FIGURA XII.

Se poi qualche termine avrà il ſegno negativo, e per eſempio $-g^2$, in ſimil riſcontro ſulla $HL = m$, che ſomminiſtra la ſomma dei quadrati poſitivi, ſi deſcriverà un ſemicerchio HRL, in cui ſi adatterà la corda $LR = g$, e ſarà l'altra corda $RH = q$ il lato del quadrato, che eſ-

prime la differenza $m^2 - g^2 = q^2$, e quindi ſarà $z = q = HR$.

Se poi i termini della quantità cognita ſaranno eſpreſſi in forma di rettangoli, converrà ridurli tutti alla medeſima altezza, e quindi ſommarli, o ſottrarli, ſecondochè avranno il ſegno più, o meno; per eſempio, ſe s' abbia l' equazione $x^2 = bc + gd - fl$, ſi ridurranno i termini gd, fl all' altezza $= b$, facendo $bm = gd$, $bn = fl$ (§. 231), e s' avrà $x^2 = bc + bm - bn$, o ſia $x^2 = b \times \overline{c+m-n}$, e facendo la retta $c + m - n = p$ (§. 228), ſarà $x^2 = bp$, onde, trovando una proporzionale di mezzo tra b, e p, ſarà $x = \pm\sqrt{bp}$.

Se s' avrà l'equazione $z^2 = \frac{7cm}{3}$, ſi ſcriverà $z^2 = \frac{7c}{3} \times m$ per l'eſpreſſione dei due lati componenti il rettangolo, fra i quali trovando la proporzionale di mezzo, ſarà $z = \sqrt{\frac{7c}{3} \times m}$.

239. Qualora la quantità cognita ſarà eſpreſſa in forma di rotto, converrà ridurla a una delle due eſpreſſioni ſemplici (§. 237) nella ſeguente maniera.

Abbiaſi $z^2 = \frac{g m n^2}{K d}$; ſe la medeſima ſi

ſcriverà in queſta conformità $z^2 = \frac{gm}{K} \times \frac{n^2}{d}$, ſi vedrà toſto, che, trovando una quarta proporzionale $= b$ alle tre rette K, g, m, s'avrà un lato del rettangolo, e trovando una terza proporzionale $= c$ alle due rette d, n, s'avrà l'altro lato del rettangolo, onde ſarà $z^2 = \frac{gmn^2}{cd} = bc$, e quindi $z = \sqrt{bc}$.

Occorrendo, che l'eſpreſſione ſia più compoſta, come $x^2 = \frac{a^2cd^3}{f^2gh}$, ſi potrà dividere come ſovra la quantità cognita $x^2 = \frac{a^2c}{f^2} \times \frac{d^3}{gh}$, e a tenore del §. 230 ſi eſprimeranno con due quarte proporzionali p, q i rotti $\frac{a^2c}{f^2}$, $\frac{d^3}{gh}$, e s'avrà $x^2 = pq$, ed $x = \sqrt{pq}$.

240. Se il numeratore, o il denominatore, o ambidue inſieme avranno più di un termine, baſterà ridurre eſſi termini a un ſolo (§. 238), indi ſi opererà a tenore dell'antecedente paragrafo. Per eſempio volendo coſtruire l'equazione finale $y^2 = \frac{4a^2c^2}{a^2-c^2}$ del problema riſolto (§. 222), ſi farà $a^2 - c^2 = g^2$ (§. 238), onde s'avrà

$y^2 = \frac{4a^2c^2}{g^2}$, e giacchè il numeratore, ed il denominatore ſono una poteſtà perfetta, ſe ne eſtrarrà la radice quadrata ſenz'altra trasformazione, e s' avrà $y = \frac{2ac}{g} = f$, quarta proporzionale alle tre rette cognite g, $2a$, c.

241. Se la quantità cognita ſarà eſpreſſa in maniera tale, che non abbia la forma di ſuperficie, converrà valerſi dell'unità (§. 235), affinchè il numeratore ſuperi ſempre il denominatore di due dimenſioni; e così l' equazione $x^2 = abc$ ſi ſcriverà $x^2 = \frac{abc}{1}$, l' equazione $y^2 = d$ ſi ſcriverà $y^2 = 1 \times d$, l' equazione $z^2 = \frac{m^2c^2}{d}$ ſi ſcriverà $z^2 = \frac{m^2c^2}{1 \times d}$, l'equazione $x^2 = \frac{ad}{m^2f}$ ſi ſcriverà $x^2 = \frac{1 \times 1 \times 1 \times ad}{m^2f}$, l'equazione $y^2 = \frac{bc \pm hl}{m+n}$ ſi ſcriverà $y^2 = \frac{1 \times bc \pm 1 \times hl}{m+n}$, e così di altre.

242. Per coſtruire le quadratiche affette, converrà ridurle a una di queſte due eſpreſſioni canoniche (§. 200) $x^2 \pm 2ax = \pm c^2$, $x^2 \pm ax = \pm bd$; baſtando per ciò praticare le addotte regole nella trasformazione delle eſpreſſioni algebraiche.

Per farne l' applicazione alle equazioni finali trovate nella ſoluzione de' problemi geometrici, ſi prenda l'equazione $x^2 - \frac{2mnx}{c} = \frac{2amn}{c}$ ottenuta al §. 224; per ridurla ad una delle canoniche, baſterà fare $\frac{mn}{c} = a$, e s'avrà $x^2 - 2ax = 2a^2$.

Si oſſervi, che l'equazione $y^2 - ay = a^2$ ottenuta nella ſoluzione del problema (§. 220) è riuſcita naturalmente ridotta all' eſpreſſione canonica.

243. Allorchè le equazioni finali ſono molto compoſte, converrà primieramente traſportare tutti i termini, ne' quali trovaſi la maſſima poteſtà, da quella banda, in cui eſſa maſſima poteſtà rieſce poſitiva, liberarla in ſeguito da qualunque coefficiente, e diviſore, indi ſcrivere gli altri termini, ne' quali trovaſi l' incognita lineare, uno ſotto l' altro, o pure a fianco, e traſportare tutti i termini cogniti nell' altro membro.

Abbiaſi l' equazione finale $4a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 2c^2x^2 + 2ac^2x + a^2c^2$ ottenuta (§. 225): ſiccome dai dati del problema ſi ricava, che $4a^2$ ſia maggiore di $2c^2$, così l' equazione ſi ordinerà, come ſegue $\overline{4a^2 - 2c^2} \times x^2$

$+\sqrt{4a^3-2ac^2}\times x = a^2c^2 - a^4$, e liberando x^2 dal coefficiente, ſarà $x^2 + \frac{\sqrt{4a^3-2ac^2}\times}{4a^2-2c^2} x = \frac{a^2c^2-a^4}{4a^2-2c^2}$. Riducaſi ora a tenore delle coſe inſegnate (§. 201) la quantità $\frac{4a^3-2ac^2}{4a^2-2c^2}$ a una ſola linea $= p$; ſi riduca pure il ſecondo membro $\frac{a^2c^2-a^4}{4a^2-2c^2}$ in una ſola ſuperficie $= fg$ (§. 240), e ſcrivendo queſte eſpreſſioni nella propoſta finale, ſi troverà la medeſima trasformata in queſta canonica $x^2 + px = fg$.

Per trasformare l'equazione finale $\frac{8d}{2a}\sqrt{cy-a^2} = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$ ottenuta (§. 226), ſi farà l'attuale moltiplica del primo membro, e s' avrà $\frac{4cdy}{a} - 4ad = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$, e ordinando l'equazione, ſarà $-4ad - 4d^2 - c^2 = y^2 - \sqrt{2c - \frac{4cd}{a}}\times y$, e eſprimendo $-2c - \frac{4cd}{a}$ colla lettera $= -p$, e la quantità $-4ad - 4d^2 - c^2$ colla ſuperficie $-fg$, la propoſta finale ſarà trasformata in queſta canonica $-fg = y^2 - py$.

Per trasformare l' equazione finale $\frac{m^2y^2}{n^2} = a^2 + y^2 - 2cy + c^2$ ottenuta (§. 223), e ridurla ad una delle eſpreſſioni canoniche, ſi moltiplicherà per n^2; e ſiccome nel caſo noſtro ſi ha dai dati del problema $m < n$, così l' equazione ſi ordinerà come ſegue, $-a^2n^2 - c^2n^2 = n^2 - m^2 \times y^2 - 2cn^2y$, e liberando dal coefficiente la maſſima poteſtà dell' incognita, ſarà $\frac{-a^2n^2-c^2n^2}{n^2-m^2} = y^2 - \frac{2cn^2y}{n^2-m^2}$, e facendo $\frac{-a^2n^2-c^2n^2}{n-m^2}$ uguale alla ſuperficie $-cd$, e la quantità $\frac{cn^2}{n^2-m^2}$ uguale alla retta b, l' equazione propoſta ſarà trasformata in queſta canonica $-cd = y^2 - 2by$.

244. Ridotte le equazioni affette di ſecondo grado a una delle eſpreſſioni canoniche, baſterà, per avere i valori algebraici dell' incognita, aggiugnere in ciaſchedun membro il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine, e indi eſtrarre la radice quadrata (§. 199), dopo del che ſi laſcerà l'incognita ſola in un membro dell'equazione.

Per riſolvere adunque l' equazione canonica $x^2 \pm 2ax = \pm c^2$, aggiungaſi il qua-

drato di a metà del coefficiente del secondo termine, e s' avrà $x^2 \pm 2ax + a^2 = \pm c^2 + a^2$, caviſi la radice quadrata, e ſarà $x \pm a = \pm\sqrt{a^2 \pm c^2}$, ed $x = \mp a \pm \sqrt{a^2 \pm c^2}$, ſoluzione generaliſſima. La ſteſſa regola ſi praticherà per l'altra eſpreſſione canonica $x^2 \pm ax = \pm bd$.

245. Per coſtruire geometricamente il valore dell' incognita, convien diſtinguere in due caſi la ſua eſpreſſione, cioè quando la quantità c^2 è poſitiva, e quando ella è negativa.

Nel primo caſo la ſoluzione generaliſſima ſarà eſpreſſa come ſegue $x = \mp\frac{1}{2} \pm \sqrt{a^2+c^2}$. Per coſtruirla facciaſi la retta $GH = c$, all' eſtremità G s' alzi la perpendicolare $GK = a$, cioè uguale alla metà del coefficiente di x, e fatto centro in K coll' intervallo KG ſi deſcriva il cerchio GLF, e ſi tiri HK, finchè incontri in F la circonferenza del cerchio, ſarà HF un valore dell'incognita, e ſarà HL l' altro valore. FIGURA XIII.

Per dimoſtrarlo ſi rifletta, che l' ipotenuſa KH è uguale alla quantità $\sqrt{a^2+c^2}$; e però, ſe ſi piglia queſto valore poſitivo, e vi ſi aggiugne la quantità a, che è fuori del ſegno, ſarà $x = HF = HK + KF = \sqrt{a^2+c^2} + a$, e ſe la quantità a ſarà ne-

gativa, si avrà $x = HL = HK - KL = \sqrt{a^2+c^2} - a$.

Se poi si piglia $\sqrt{a^2+c^2}$ negativo, e sia positivo a, sarà $x = -HK + KL = -HL = -\sqrt{a^2+c^2} + a$, valore negativo, e se sarà negativa anche la quantità a, s' avrà $x = HF = -a - \sqrt{a^2+c^2}$.

Da questa costruzione si comprende, che è sempre possibile la soluzione di que' problemi del secondo grado, in cui la quantità c^2 è positiva.

246. Per costruire le quadratiche affette appartenenti al secondo caso, cioè quando c^2 è negativo, come nell' equazione $x = \mp a \pm \sqrt{a^2-c^2}$, si fa la retta $GH = c$, all' estremità G s' alza la perpendicolare $GK = a$, cioè uguale alla metà del coefficiente di x, e fatto centro in K coll'intervallo KG si descrive il cerchio GLF, e dal punto H si tira HLF parallela alla perpendicolare GK, sarà HF un valore di x, ed HL un altro valore.

FIGURA XIV.

Per dimostrarlo dal centro K si tirino i raggi KF, KL ai punti L, F, ne' quali HF interseca la circonferenza, e dallo stesso centro K si tiri KD perpendicolare sulla HF, sarà $KD = GH = c$, e $DH = GK = a$; e sarà $DL = DF = \sqrt{a^2-c^2}$; e però, se si piglia $\sqrt{a^2-c^2}$ positivo, come pure la quan-

tità a, che è fuori del ſegno, ſarà $x = HF = HD + DF = a + \sqrt{a^2 - c^2}$, e ſe la quantità a ſarà negativa, ſarà pure negativo il valore di $x = HL = -a + \sqrt{a^2 - c^2}$.

Se poi ſi piglierà negativo il radicale $\sqrt{a^2 - c^2}$, e poſitiva la quantità a, ſarà pure poſitivo il valore di $x = HD - DL = a - \sqrt{a^2 - c^2}$, e ſe a ſarà anche negativo, riuſcirà pure negativo il valore di $x = HD + DF = -a - \sqrt{a^2 - c^2}$.

Da queſta coſtruzione ſi comprende facilmente che, quando $GH = c$ ſarà minore di a, la retta HF ſegherà il cerchio, e quindi ſi avranno due valori diſuguali di x. Quando $c = a$, la retta HF toccherà il cerchio, e quindi i due valori di x ſaranno uguali ciaſcheduno al raggio a del cerchio; e ſarà $c > a$, la lettera HF più non ſegherà, nè toccherà il cerchio, e quindi la ſoluzione del problema ſarà impoſſibile, riuſcendo in queſto caſo negativa la quantità $a^2 - c^2$ ſotto il ſegno radicale.

Si ſcorge adunque che, qualora nei problemi di ſecondo grado le radici ſono immaginarie, avviene una tal coſa da voler ſegare il cerchio con una retta parallela al diametro, e da queſto diſtante per un intervallo maggiore del raggio.

247. Per mezzo delle cose spiegate sarà anche facile di costruire i valori delle equazioni di quarto grado pure, e di quelle affette del quarto, e dell' ottavo grado, che sono derivative del secondo.

Abbiasi l' equazione $y^4 = c^4 \pm f^3 K$. Per mezzo delle cose insegnate si trasformi il termine $f^3 K$ in modo, che contenga due dimensioni dell' altro termine c^4, e sia $c^2 m^2 = f^3 K$, sarà $y^4 = c^4 \pm c^2 m^2$, si estragga la radice quadrata, e sarà $y^2 = \sqrt{c^4 \pm c^2 m^2}$; si cavi fuori del segno radicale la quantità c^2, s' avrà $y^2 = c\sqrt{c^2 \pm m^2}$. In questa espressione si osserva, che, se m^2 è positivo, sarà $\sqrt{c^2+m^2}$ l'ipotenusa del triangolo rettangolo, i cui catetti sono c, m, e chiamando quest' ipotenusa $= p$, sarà $y^2 = c\sqrt{c^2+m^2} = cp$, e quindi $y = \sqrt{cp}$.

Se m^2, essendo negativo, sarà maggiore di c^2, le radici saranno immaginarie; ma se $c^2 > m^2$, allora $\sqrt{c^2 - m^2}$ sarà un catetto del triangolo rettangolo, la cui ipotenusa sarà $= c$, e l' altro catetto $= m$; pertanto, se sia $\sqrt{c^2 - m^2} = q$, sarà $y^2 = c\sqrt{c - m} = cq$, e $y = \sqrt{cq}$.

Le cose quì avanti spiegate bastano per trasformare, e ridurre alla forma $y^4 = c^4 \pm c^2 m^2$ tutte le equazioni del quarto grado pure.

248. Le medeſime regole ſervono per coſtruire i valori delle incognite nelle equazioni di quarto grado affette, allorchè ſono derivative del ſecondo grado; a tal fine ſi ridurranno tutte queſte equazioni alla ſeguente forma $x^4 \pm 2a^2x^2 = \pm c^4$. Ciò fatto aggiungaſi da ambe le parti il quadrato della metà del coefficiente di x^2, e s' avrà $x^4 \pm 2a^2x^2 + a^4 = a^4 \pm c^4$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quadrata, ſarà $x^2 \pm a^2 = \sqrt{a^4 \pm c^4}$ Si trasformi queſto radicale nell'eſpreſſione $a\sqrt{a^2 \pm m^2}$ (§. 247), e fatto $\sqrt{a^2 \pm m^2} = p$, s' avrà $x^2 = \pm a^2 \pm ap$, e ſuppoſto che la quantità cognita ap ſia poſitiva, ſarà $x = \sqrt{a^2 \pm ap} = \sqrt{a \times a \pm p}$..

249. Le equazioni dell' ottavo grado affette, le quali ſono derivative del ſecondo, ſi maneggiano pure nella ſteſſa maniera, dovendoſi prima ridurre a queſta forma $z^8 \pm 2a^4z^4 = \pm c^8$. Ciò fatto aggiungaſi da ambe le parti il quadrato della metà del coefficiente di z^4, s' avrà $z^8 \pm 2a^4z^4 + a^8 = a^8 \pm c^8$, ed eſtratta la radice quadrata da ambe le parti, ſarà $z^4 \pm a^4 = \pm\sqrt{a^8 \pm c^8}$. Si trasformi il termine c^8 in un altro, che contenga a^4, onde ſia $c^8 = a^4m^4$, ſarà $\sqrt{a^8 \pm c^8} = \sqrt{a^8 \pm a^4m^4}$, e cavando a^4 fuori del ſegno, ſarà $\sqrt{a^8 \pm a^4m^4} = a^2\sqrt{a^4 \pm m^4}$.

Si tratti queſto radicale $\sqrt{a^4 \pm m^4}$, come ſi è fatto nel (§. 247) col trasformare il termine m^4 in un altro, che contenga il quadrato di a^2, e ſia per eſempio $m^4 = a^2 n^2$, ſarà $a^2\sqrt{a^4 \pm m^4} = a^2\sqrt{a^4 \pm a^2 n^2}$, e cavando a^2 fuori del ſegno radicale, ſarà $a^2\sqrt{a^4 \pm a^2 n^2} = a^3\sqrt{a^2 \pm n^2}$, e facendo $\sqrt{a^2 \pm n^2} = p$, ſarà $a^3\sqrt{a^2 \pm n^2} = a^3 p = \sqrt{a^8 \pm c^8}$, onde ſoſtituendo $a^3 p$ nell'equazione $z^4 \pm a^4 = \pm\sqrt{a^8 \pm c^8}$, s'avrà $z^4 \pm a^4 = \pm a^3 p$, e quindi $z^4 = \mp a^4 \pm a^3 p$, e ſuppoſto che la quantità cognita ſia poſitiva, ſarà $z^2 = \sqrt{a^4 \pm a^3 p} = a\sqrt{a^2 \pm ap}$, e facendo $\sqrt{a^2 \pm ap} = q$, ſarà $z^2 = aq$, e $z = \sqrt{aq}$.

Per mezzo dell'addotto maneggio ſi troveranno i valori dell'incognita nell'equazione finale $y^8 = 4c^4 y^4 + 16c^8$ ottenuta nella ſoluzione del problema (§. 221).

CAPO V.

Si danno alcuni ripieghi principali per ottenere l'equazione finale di un preblema molto depreſſa.

250. Si è già veduto in più luoghi, che dalla maniera diverſa di trattare la ſoluzione dello ſteſſo problema naſcono delle equazioni più, o meno compoſte, ed elevate

a gradi differenti; e ſiccome una delle principali cure dell'Analiſta conſiſter dee nell'induſtriarſi per ottenere equazioni finali depreſſe più che ſia fattevole, così per accreſcere le notizie, che intereſſano queſta materia, ſi danno in queſto capo alcuni principali ripieghi, che ſi applicano immediatamente alla ſoluzione de' problemi.

Data la ſomma $= a$ di tre grandezze in continua proporzione geometrica, e data la ſomma dei loro quadrati $= c^2$, trovare eſſe tre grandezze.

Se la ſoluzione di queſto problema s'intraprenderà nella maniera, che ſembra più ovvia, e naturale, coll'eſprimere queſte grandezze a norma del §. 121, $:: p : pd : pd^2$, s'avranno le due ſeguenti equazioni primitive

1.ª $p + pd + pd^2 = a$

2.da $p^2 + p^2d^2 + p^2d^4 = c^2$

Si trovi nella prima, come la più ſemplice, il valore di $p = \frac{a}{d^2+d+1}$, e queſto ſi ſoſtituiſca nella ſeconda, s'avrà l'equazione finale di quarto grado affetta

2.da $\frac{a^2+a^2d^2+a^2d^4}{d^4+2d^3+3d^2+2d+1} = c^2$

la quale non si può risolvere colle cose insegnate.

Se in vece dell' addotta espressione canonica si userà quest' altra, in cui le tre grandezze ricercate costituiscono pure una proporzione continua $:: p : q : \frac{q^2}{p}$, s' avranno le due equazioni primitive.

1.° $p + q + \frac{q^2}{p} = a$

2.da $p^2 + q^2 + \frac{q^4}{p^2} = c^2$, le quali, essendo più composte delle altre due, somministrano un' equazione finale assai più difficile a maneggiarsi dell' altra.

251. Il ripiego da usarsi per ottenere l' equazione finale del proposto problema (§. 250) molto depressa consiste nel distendere il canone senza badare, che le tre grandezze esser debbano in continua proporzione geometrica. E però sia
il primo termine $= p$
il secondo $= q$
sarà il terzo $= a - p - q$.

Ciò fatto, per adempiere la prima delle condizioni del problema, cioè che queste grandezze sieno continuamente proporzionali, si farà uso di una delle sue proprietà, e per esempio che il prodotto

degli eſtremi è uguale al quadrato di quella di mezzo (§. 125).

1.ª $p \times \overline{a-p-q} = q^2$, la qual coſa ſomminiſtra nel tempo ſteſſo una delle equazioni primitive del problema.

L'altra equazione primitiva ſi deduce immediatamente dalla ſeconda condizione eſpreſſa nel problema, cioè

2.da $p^2 + q^2 + \overline{a-p-q}^2 = c^2$

Due ſono pertanto le incognite in queſte due equazioni, cioè p, q.

Nella prima equazione ſi trovi il valore del primo termine $= p$, e ſarà

1.° $p = \frac{a-q}{2} + \sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}}$, ſoſtituiſcaſi queſto valore di p nell'eſpreſſione $a-p-q$, e s'avrà $\frac{a-q}{2} - \sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}}$ pel terzo termine.

Si quadrino queſti valori del primo, e terzo termine, e ſoſtituiſcanſi nella ſeconda equazione primitiva

2.da $p^2 + q^2 + \overline{a-p-q}^2 = c^2$, s'avrà

2.da $\frac{a^2-2aq-q^2}{2} + a-q\sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}}$

$+ q^2 + \frac{a^2-2aq-q^2}{2} - a+q\sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}} = c^2$,

e, corretta l'eſpreſſione, ſarà $a^2 - 2aq = c^2$, equazione finale di primo grado, in cui

$q = \frac{a^2-c^2}{2a}$, e ſoſtituendo queſto valore di q nella prima equazione.

1.ª $p = \frac{a-q}{2} + \sqrt{\frac{a^2 - 2aq - 3q^2}{4}}$, ſi farà cognito anche il valore del primo termine.

252. Trovare i quattro termini di una proporzione geometrica continua, de'quali ſia cognita la ſomma $= a$ degli eſtremi, e l'altra dei due termini di mezzo $= c$.

Se i quattro termini ricercati ſi eſprimeranno a tenore del §. 121. $\therefore p : pd : pd^2 : pd^3$, s'avranno le due equazioni primitive

1.ª $p + pd^3 = a$

2.da $pd + pd^2 = c$

e trovando in una di queſte il valore di p, come il più ſemplice, e queſto ſoſtituito nell'altra equazione, s'avrà la finale di 3.° grado $ad + ad^2 = cd^3 + c$.

253. Il ripiego da praticarſi per ottenere più depreſſa l'equazione finale del problema antecedente conſiſte nell'eſprimere i quattro termini continuamente proporzionali in queſt'altra maniera $\therefore p : q : \frac{q^2}{p} : \frac{q^3}{p^2}$, la quale ſomminiſtra le due ſeguenti equazioni primitive

1.ª $p + \frac{q^3}{p^2} = a$

$2.^{da} q + \frac{q^2}{p} = c$

nella ſeconda di queſte equazioni, come la più ſemplice, ſi trovi il valore del primo termine $p = \frac{q^2}{c-q}$, e queſto ſoſtituiſcaſi nella prima equazione, s'avrà $\frac{q^2}{c-q} + \frac{q^3}{\frac{q^4}{c-q^2}} = a$, o ſia $\frac{q^2}{c-q} + \frac{c^2-2cq+q^2}{q} = a$, in cui facendo ſcomparire i rotti, e correggendo l'eſpreſſione, s'avrà l'equazione finale di $2.^{do}$ grado $c^3 - 3c^2q + 3cq^2 = acq - aq^2$ da trattarſi nelle ſolite maniere, e trovato il valore di q, ſi ſoſtituirà nell'equazione di primo grado $p = \frac{q^2}{c-q}$ per avere il valore del primo termine.

Importa quì l'oſſervare, che l'eſpreſſione delle grandezze proporzionali, la quale in queſto paragrafo ſomminiſtra una equazione finale depreſſa uſata nel problema (§. 250), produce un effetto totalmente oppoſto.

Riuſcirà ancora più ſemplice la ſoluzione di queſto problema, ſe ſi farà uſo del corollario (§. 163): imperciocchè, chiamando $= x$ la differenza fralli due termini

estremi, ed $=y$ la differenza fralli termini medj, s' avrà la proporzione continua $\therefore \frac{a+x}{2} : \frac{c+y}{2} : \frac{c-y}{2} : \frac{a-x}{2}$, da cui si ricavano le tre seguenti equazioni primitive

1.ª $a^2 - x^2 = c^2 - y^2$

2.da $ac + cx - ay - xy = c^2 + 2cy + y^2$

3.ª $ac - cx + ay - xy = c^2 - 2cy + y^2$.

Si sottri la terza equazione dalla seconda, s' avrà $2cx - 2ay = 2cy$, e quindi $x = \frac{ay + cy}{c}$, e sostituito questo valore di x nella prima, s' avrà l' equazione semplice di secondo grado.

1.ª $a^2 - \frac{a^2y^2 - 2acy - c^2y^2}{c^2} = c^2 - y^2$.

254. Qualunque volta la soluzione del problema riesce molto difficile o per la parsimonia dei dati, o perchè le quantità sono scambievolmente molto intricate, in simili riscontri riesce utilissimo dividere il problema in due altri, combinati però in modo, che la soluzione del primo serva d' avviamento per risolvere facilmente il secondo (§. 215 n. 4). Del gran vantaggio, che si ricava da questo ripiego, se ne hanno molti esempj nella Geometria, ove s' incontrano di tanto in tanto dei Lemmi ideati a bella posta per agevo-

lare il maneggio della ſuſſeguente propoſizione.

L'applicazione, che di queſto ripiego ſi fa nella ſoluzione de' problemi (§. 255, e 259) darà lume baſtante per valerſene in quegli altri caſi, ne' quali ſi uſa il metodo analitico per riſolvere i problemi.

255. Dato il ſemicerchio *FGHKL* col diametro *FL* prolungato ſino in *T* tirare da queſto punto una ſegante *TKG* tale, che l'arco *GHK* ſia le due quinte parti della mezza circonferenza *FGHKL*. FIGURA XV.

Dall'eſpoſto del problema ſi vede, che la proprietà delle due ſeganti (Euclide lib. 3. Propoſ. 36) è bensì neceſſaria alla ſoluzione del queſito, ma che queſta proprietà non baſta per ottenere l'addimandata ragione tra l'arco *GHK*, e la mezza circonferenza, e che prima di far uſo della diviſata proprietà convien conoſcere il valore della corda *GK*. Per la qual coſa ſi potrà dividere il problema propoſto ne' due ſeguenti.

1.° Trovare una corda *GK*, la quale nel dato ſemicerchio ſia ſotteſa all'arco *GHK* uguale alle due quinte parti della mezza circonferenza *FGHKL*.

2.do Dal punto dato *T* preſo nel diametro *FL* prolungato tirare nel dato ſemi-

cerchio una ſegante tale, che la parte intercetta *GK* ſia uguale a una retta data.

256. Per riſolvere il primo problema ſi rifletta che, dovendo l'arco *GHK* eſſere le due due quinte parti della mezza circonferenza *FGHKL*, ſarà eſſo arco di gradi 72. Dal centro *Q* del ſemicerchio ſi tirino i raggi *QG*, *QK*, i quali formino l'angolo *GQK* di gradi 72, ſaranno nel triangolo iſoſcele *GQK* noti i tre angoli, ed i due lati *QG*, *QK*, e quindi per la Trigonometria ſarà nota la corda *GK*.

Se ſi vuole preſcindere dalla Trigonometria baſterà compire il cerchio *FGHKLS*, e valendoſi della propoſizione 11. lib. 4. d'Euclide, vi ſi inſcriverà un pentagono equilatere, ed equiangolo, giacchè ognuno de' ſuoi lati, eſſendo ſotteſo all'arco di gradi 72, ſomminiſtra il valore della ricercata corda.

257. Trovato il valore della retta *GK*, ſi paſſerà alla ſoluzione del ſecondo problema (§. 255), valendoſi perciò della proprietà delle ſeganti eſpreſſa nella ſeguente equazione

$$FT \times LT = GT \times KT$$

Si distenda adunque il canone, e sia

$FL = 2a$
$LT = b$
$GK = c$
$KT = y$

sarà $FT = 2a + b$
$GT = c + y$

Sostituiscansi i valori analitici nella addotta proprietà delle seganti, e s' avrà $\overline{2a+b} \times b = \overline{c+y} \times y$, cioè $2ab + b^2 = cy + y^2$, equazione di secondo grado da trattarsi nel modo solito.

258. Dato il quadrato $ABCD$ col lato AB prolungato verso E, tirare una retta DE in modo, che la parte EF sia uguale al lato del quadrato. FIGURA XIX. TAVOLA II.

Suppongasi già tirata la DE coll'addimandata condizione, e si chiami $AB = EF = a$, $BE = x$, $BF = y$, sarà $AE = a + x$; e poichè l' angolo EBF è retto, s' avrà nel triangolo rettangolo EBF $\overline{FE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2$, e scrivendo i valori analitici, sarà $a^2 = x^2 + y^2$ 1.ª equazione.

Per avere l' altra equazione si rifletta, che sono simili i triangoli BFE, ADE, e però sarà $BF : BE :: AD : AE$, e sostituendo i valori analitici, e fatto il prodotto de' medj, e degli estremi, s'avrà la

ſeconda equazione $ax = \overline{a+x} \times y$, e quindi 2.da $\frac{ax}{a+x} = y$. Soſtituiſcaſi queſto valore di y nella prima equazione, s'avrà l'equazione finale $a^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{a^2+2ax+x^2}$ e facendo ſparire il rotto, e correggendo l' eſpreſſione, ſarà $a^4+2a^3x = a^2x^2 = 2ax^3 + x^4$

Se in vece di cercare il valore di BE ſi cercherà quello di DE, s' avrà un' altra equazione finale.

Si continui a chiamare $AB = FE = a$, $DE = x$, $BF = y$, farà $DF = x - a$. Si conſideri ora, che, eſſendo BF parallela alla AD, s' avrà $DF : AB :: FE : BE$, o ſia in valori analitici $x-a : a :: a : \frac{a^2}{x-a} = BE$; e però nel triangolo rettangolo FBE ſarà $\overline{FE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BE}^2$, o ſia $a^2 = y^2 + \frac{a^4}{x^2-2ax+a^2}$ 1.a equazione.

Dai triangoli ſimili ADE, BFE ſi ha $DE : AD :: FE : BF$, o ſia $x : a :: a : y$, e quindi $\frac{a^2}{x} = y$, e ſoſtituendo queſto valore di y nella prima equazione, ſi ha la finale $a^2 = \frac{a^4}{x^2} + \frac{a^4}{x^2-2ax+a^2}$, e facendo ſcomparire i rotti, ſi ha $x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x = a^4$.

Riuſcirà più ſemplice l'equazione finale, ſe, ſuppoſta diviſa pel mezzo in G l'intercetta FE, ſi cercherà il valore di DG. A tal fine ſi chiami $AD = EF = a$, ſarà $EG = FG = \frac{a}{2}$, e chiamando $DG = x$, ſarà $DE = x + \frac{a}{2}$, $DF = x - \frac{a}{2}$, e poſto $BF = y$, s'oſſervi, che dai triangoli ſimili ADE, BFE ſi ha $DE : FE :: AD : BF$, o ſia $x + \frac{a}{2} : a :: a : y$, e quindi $\frac{a^2}{x+\frac{a}{2}} = y$. In oltre dagli ſteſſi triangoli ſi ha $DF : FE :: AB : BE$, o ſia $x - \frac{a}{2} : a :: a : \frac{a^2}{x-\frac{a}{2}} = BE$; e poichè nel triangolo rettangolo BFE ſi ha $\overline{FE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BE}^2$, s'avrà in valori analitici $a^2 = y^2 + \frac{a^4}{x^2 - ax + \frac{a^2}{4}}$, e ſcrivendo in vece di y il ſuo valore, e correggendo l'eſpreſſione, s'avrà l'equazione finale del quarto grado derivativa del ſecondo

$$x^4 - \frac{5a^2x^2}{2} = \frac{7a^4}{16}$$

Finalmente ſe all'eſtremità E della ED ſi ſupporrà tirata la perpendicolare EK, la quale ſega in K il lato DC prolunga-

to, e ſi cercherà il valore di DK, l'equazione finale riuſcirà ancora più ſemplice.

Tirata dal punto E la retta EL perpendicolare alla DK, ſaranno ſimili i triangoli KEL, FDC, KED. Si chiami $CD = FE = EL = a$, $DK = x$, $DF = KE = y$, ſarà $DE = a + y$.

Nel triangolo rettangolo KED ſi ha $\overline{DK}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{KE}^2$, o ſia $x^2 = a^2 + 2ay + y^2 + y^2 = a^2 + 2ay + 2y^2$ 1.ª equazione.

Dai triangoli ſimili DKE, DFC ſi ha $DE : DK :: DC : DF$, o ſia $a + y : x :: a : y$, e quindi $ay + y^2 = ax$, e moltiplicando per 2 ſi ha $2ay + 2y^2 = 2ax$ nella prima equazione; ſoſtituiſcaſi $2ax$ in vece di $2ay + 2y^2$, s'avrà l'equazione finale $x^2 = a^2 + 2ax$.

259. Data la ſomma $= a$ di quattro grandezze in continua proporzione geometrica, e data la ſomma de' loro quadrati $= c^2$, trovare eſſe quattro grandezze.

Se per trovare i termini ricercati ſi farà uſo dell'eſpreſſione $\therefore p : q : \frac{q^2}{p} : \frac{q^3}{p^2}$, per mezzo della quale ſi è ottenuta una equazione finale di ſecondo grado (§. 253), s'avranno nel caſo preſente le due equazioni primitive molto elevate.

1.ª $p + q + \frac{q^2}{p} + \frac{q^3}{p^2} = a$

2.da $p^2 + q^2 + \frac{q^4}{p^2} + \frac{q^6}{p^4} = c^2$, e quindi l'equazione finale, che ne risulterà, ascenderà necessariamente a un grado sublime.

Se poi si userà l'espressione canonica $\therefore p : pd : pd^2 : pd^3$ (§. 121), s'avrà nelle primitive

1.ª $p + pd + pd^2 + pd^3 = a$

2.da $p^2 + p^2d^2 + p^2d^4 + p^2d^6 = c^2$ il primo termine $= p$ assai più depresso; onde l'equazione finale ascenderà bensì a grado minore dell'altra, ma sarà tutt'ora elevata al sesto grado.

Affine pertanto di ottenere una equazione finale più depressa, si divida il problema nei due seguenti (§. 254).

1.° Data la somma $= a$ di quattro termini in continua proporzione geometrica, e quella dei loro quadrati $= c^2$, trovare la somma dei due termini di mezzo.

2.do Trovare i quattro termini di una proporzione continua geometrica, de'quali sia data la somma dei due estremi, e quella dei due termini di mezzo.

Dall'esposizione del primo problema si vede, che quanto in esso ricercasi dee essere più semplice, e più facile a ritrovarsi,

che ſe ſi cercaſſero a dirittura i quattro termini, e ſi vede pure che, quando ſi ſarà trovata la ſomma dei due termini di mezzo, il ſecondo problema ſarà lo ſteſſo, che ſi è già riſolto (§. 253) con una equazione finale di ſecondo grado.

Oltre l'aver diſtinto il problema propoſto in due particolari, è neceſſario ancora, per avere una equazione finale depreſſa, uſare il ripiego deſcritto (§. 251), cioè diſtendere il canone ſenza badare, che i quattro termini eſſer debbono in continua proporzione geometrica. Ciò poſto

260. Sia la ſomma de' quattro termini $= a$

Quella dei loro quadrati $= c^2$

La ſomma dei due termini di mezzo $= y$

Il primo termine $= p$

Il ſecondo $= q$

ſarà il terzo $= y - q$

Il quarto $= a - p - y$

Per adempiere ora alla prima condizione del problema, cioè che i quattro termini ſieno continuamente proporzionali, ſi faccia uſo di una delle ſue proprietà dimoſtrata (§. 125), cioè che il prodotto del primo nel terzo termine è uguale al quadrato del ſecondo, ed il prodotto del ſecondo nel quarto termine è uguale

al quadrato del terzo, col qual mezzo s' avranno le due ſeguenti equazioni primitive.

1.ª $p \times \overline{y-q} = q^2$

2.da $q \times \overline{a-p-y} = \overline{y-q}^2$

Per avere poi la terza equazione primitiva baſta adempiere l' altra condizione del problema, cioè

3.ª $p^2 + q^2 + \overline{y-q}^2 + \overline{a-p-y}^2 = c^2$

Se queſte equazioni ſi maneggeranno colle ſolite regole per ridurle alla finale, queſta riuſcirà ancora molto compoſta; ma, ſe ſi uſerà il ripiego ſeguente, ſi otterrà una finale di ſecondo grado.

Dei quattro termini proporzionali ſe ne faccia il prodotto dei medj, e degli eſtremi, e s' avrà l' equazione

$ap - p^2 - py = qy - q^2$. Si divida queſt' equazione in due, ſupponendo ciaſcun membro uguale all' incognita x^2, e ſi avranno in tal guiſa le due equazioni ſegnate G, K.

$G \cdot ap - p^2 - py = x^2$

$K \cdot qy - q^2 = x^2$

Nell' equazione G ſi trovi il valore del primo termine $= p$, e ſarà

$$p = \frac{a-y}{2} + \sqrt{\frac{a^2 - 2ya + y^2 - x^2}{4}}.$$

Soſtituiſcaſi queſto valore di p nell'eſpreſſione del quarto termine $a-p-y$, e ſarà eſſo quarto termine

$a-\frac{a+y}{2}-\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}-y$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà il quarto termine $=\frac{a-y}{2}-\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}$.

Si avranno adunque le ſeguenti eſpreſſioni

del primo termine $=\frac{a-y}{2}+\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}$

del quarto termine $=\frac{a-y}{2}-\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}$

nelle quali le incognite p, q più non compaiono.

Nell'equazione K ſi trovi il valore del ſecondo termine $=q$, e ſarà

$q=\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$. Soſtituiſcaſi queſto valore nell'eſpreſſione del terzo termine $y-q$, s'avrà $y-\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà il terzo termine $=\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$.

E però ſi avranno le ſeguenti eſpreſſioni del ſecondo termine $=\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$

del

del terzo termine $= \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - x^2}$, nelle quali più non si vedono le incognite p, q.

Si quadri ora ciascheduno de' ritrovati termini per indi sommarli insieme, e sostituirli nella terza equazione primitiva, e sarà

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{a^2-2ya+y^2}{2} - x^2 + a-y\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}} \\ q^2 &= \frac{y^2}{2} - x^2 + y\sqrt{\frac{y^2}{4} - x^2} \ldots\ldots \\ \overline{y-q}^2 &= \frac{y^2}{2} - x^2 - y\sqrt{\frac{y^2}{4} - x^2} \ldots\ldots \\ \overline{a-p-y}^2 &= \frac{a^2-2ya+y^2}{2} - x^2 - a+y\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2}{4} - x^2} \end{aligned}\right\} = c^2$$

e sommati questi quadrati insieme, e corretta l' espressione, si ha

$3.^a a^2 - 2ya + 2y^2 - 4x^2 = c^2$, e quindi

$$\frac{a^2-2ya+2y^2-c^2}{4} = x^2$$

Sostituiscasi questo valore di x^2 nelle espressioni dei quattro termini, e s'avrà

$$1.^o = \frac{a-y}{2} + \sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2}{4} - \frac{a^2+2ya-2y^2+c^2}{4}}$$

$$= \frac{a-y}{2} + \sqrt{\frac{c^2-y^2}{4}}$$

$$2.^{do} = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{a^2+2ya-2y^2+c^2}{4}} =$$

$$\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{-a^2+2ya-y^2+c^2}{4}}$$

$$3.^{o} = \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{-a^2 + 2ya - y^2 + c^2}{4}}$$

$$4.^{o} = \frac{a-y}{2} - \sqrt{\frac{c^2 - y^2}{4}}$$

Si ſoſtituiſcano queſti valori nelle due equazioni primitive

$1.^{a}\ p \times \overline{y-q} = q^2$

$2.^{da}\ q \times \overline{a-p-y} = \overline{y-q}^2$

e per ſemplificarne il calcolo, ſuppongaſi

$$\sqrt{\frac{c^2 - y^2}{4}} = n$$

$$\sqrt{\frac{-a^2 + 2ya - y^2 + c^2}{4}} = m$$

ſaranno eſſi termini

$1.^{o}\ \frac{a-y}{2} + n$

$2.^{do}\ \frac{y}{2} + m$

$3.^{o}\ \frac{y}{2} - m$

$4.^{o}\ \frac{a-y}{2} - n$, e quindi ſarà

La prima equazione $\overline{\frac{a-y}{2} + n} \times \overline{\frac{y}{2} - m}^2 = \frac{y}{2} + m$

o ſia

$1.^{a}\ \frac{ay - y^2}{4} + \frac{yn + ym - am}{2} - mn = \frac{y^2}{4} + ym + m^2$

La 2.da equazione $\frac{y}{2}+m\sqrt{\frac{a-y}{2}}-n=\frac{y}{2}-m$

o ſia

2.da $\frac{ay-y^2}{4}-\frac{yn-ym+am}{2}-mn=\frac{y}{4}-ym+m^2$

e, ſottratta queſta dalla prima, ſi ha $yn+ym-am=2ym$, e, corretta l'eſpreſſione, rimane

$yn=ym+am$

Si ſcrivano in queſt'equazione i valori radicali in vece delle lettere m, n, e s'avrà

$$y\sqrt{\frac{c^2-y^2}{4}}=y+a\sqrt{\frac{-a^2+2ya-y^2+c^2}{4}}$$

ſe ne quadri ciaſcun membro, e ſi corregga indi l'eſpreſſione, e ſarà

$c^2y^2-y^4=-a^4+2y^2a^2-y^4+a^2c^2+2ac^2y+c^2y^2$, e corretta di nuovo l'eſpreſſione, e dividendo per a, ſarà

$a^3=2ay^2+ac^2+2c^2y$, equazione finale di ſecondo grado, in cui trovato il valore di y, che è la ſomma dei due termini di mezzo, e queſto ſottratto dalla ſomma $=a$ de' quattro termini, s'avrà nell'avanzo la ſomma dei due eſtremi, col qual mezzo ſi riſolverà il ſecondo problema (§. 259) per mezzo di una equazione finale pure di ſecondo grado (§. 253).

Riuſcirà aſſai più ſemplice la ſoluzione del problema, e ſenza dimezzarlo in due, ſe ſi farà uſo del Corollario (§. 163) nel diſtendere il canone.

Si chiami $= y$ la ſomma dei due termini di mezzo, ſarà quella de' due eſtremi $= a - y$.

Sia la differenza fra queſti eſtremi $= x$, e ſia $= z$ quella fra i termini medj, ſarà

Primo termine $= \frac{a-y+x}{2}$

2.do . . . $= \frac{y+z}{2}$

3.o . . . $= \frac{y-z}{2}$

4.o . . . $= \frac{a-y-x}{2}$, i quali a mente della prima condizione del problema formano la proporzione continua geometrica $:: \frac{a-y+x}{2} : \frac{y+z}{2} : \frac{y-z}{2} : \frac{a-y-x}{2}$, dalla quale ſi ricavano le tre ſeguenti equazioni primitive

1.a $a^2 - 2ay + y^2 - x^2 = y^2 - z^2$, o ſia 1.a $a^2 - 2ay - x^2 = - z^2$

2.da $ay - y^2 + xy - az + yz - xz = y^2 + 2yz + z^2$

3.a $ay - y^2 - xy + az - yz - xz = y^2 - 2yz + z^2$.

Si ſottri la terza equazione dalla ſeconda,

e ſi corregga l'eſpreſſione dell'avanzo, s'avrà 4.ª $xy = az + yz$, e quindi $\frac{xy}{a+y} = z$.

Nella 1.ª, e 4.ª equazione s'avranno le tre incognite x, y, z; affine pertanto di avere un'altra equazione, in cui ſi trovino eſſe trè incognite, s'adempiſca l'altra condizione del problema, cioè che la ſomma dei quadrati dei quattro termini ſia uguale c^2, e s'avrà, corretta l'eſpreſſione. 5.ª $a^2 - 2ay + 2y^2 + x^2 + z^2 = 2c^2$, in cui, ſe ſi ſoſtituirà il valore di $z^2 = x^2 + 2ay - a^2$ dedotto dalla prima, s'avrà, corretta l'eſpreſſione, 5.ª $x^2 = c^2 - y^2$.

Nella 4.ª equazione s'elevi ciaſcun membro al quadrato, e ſoſtituito il valore di $z^2 = x^2 + 2ay - a^2$, s'avrà 4.ª $\frac{x^2y^2}{a^2+2ay+y^2} = x^2 + 2ay - a^2$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà 4.ª $a^4 - 3a^2y^2 - 2ay^3 = a^2 + 2ay \times x^2$. Soſtituiſcaſi in queſta il valore di x^2 dedotto dalla 5.ª, e ſi corregga l'eſpreſſione, s'avrà l'equazione finale di ſecondo grado 4.ª $a^4 - 2a^2y^2 = a^2c^2 + 2ac^2y$ da trattarſi nel modo ſolito.

PARTE TERZA

Delle Progreſſioni.

261. Si denomina *Progreſſione* qualſivoglia proporzione continua, la quale ha più di quattro termini. Se queſta proporzione ſarà aritmetica, la progreſſione ſi chiamerà *Aritmetica*, e ſi dirà *Geometrica* la progreſſione, ſe tale ſarà la proporzione continua.

Da queſta definizione conſegue, che la teoria ſpiegata nel Capo 5. della prima parte intorno le proporzioni continue conviene preciſamente alle progreſſioni, di cui ſi tratta, e ne ſomminiſtra i fondamenti.

CAPO I.

Delle Progreſſioni Aritmetiche.

262. Le progreſſioni aritmetiche creſcenti, e le decreſcenti poſſono principiare da qualſivoglia numero, ed eziandio dal zero, ed eſtenderſi all' infinito con un eſponente qualunque, come ſi può oſſervare nei ſeguenti eſempj.

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . ec.
÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . ec.
÷ 4 . 9 . 14 . 19 . 24 . 29 . 34 . ec.
÷ 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2 . ec.
÷ 53 . 46 . 39 . 32 . 25 . 18 . 11 . ec.

Si dee quì notare, che nelle progreſſioni decreſcenti può ſvanire uno de' ſuoi termini, e riuſcire uguale al zero, mentre gli altri ſucceſſivi diventano negativi, come ſi vede in queſt' eſempio.

÷ 20 . 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . — 4 . — 8 . — 12 . ec.

Altre volte poi i termini paſſano dal poſitivo al negativo, ſenza che il zero ſia compreſo fra eſſi, come

÷ 15 . 8 . 1 . — 6 . — 13 . — 20 ec.

263. Preſa la proporzione continua(§. 113) ÷ $p . p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d$, e accreſcendo in eſſa il numero de' termini a beneplacito, ſi ha la ſeguente progreſſione aritmetica eſpreſſa in una maniera generaliſſima.

÷ $p . p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d . p \pm 4d . p \pm 5d . p \pm 6d$. ec.

Un breve eſame fatto intorno queſta eſpreſſione canonica baſta per dedurne i ſeguenti teoremi.

264. In qualſivoglia progreſſione aritmetica

1.° Preſi due termini qualſivoglia la loro ſomma uguaglia quella di due altri ter-

mini ugualmente distanti dai due presi. Per esempio la somma del primo termine p, e del sesto $p \pm 5d$ uguaglia la somma del secondo $p \pm d$, e del quinto $p \pm 4d$, ed uguaglia pure la somma del terzo $p \pm 2d$, e del quarto $p \pm 3d$, giacchè ciascheduna di esse somme si esprime per $2p \pm 5d$.

2.do Se i termini della prtgressione sono dispari, la somma dei due estremi uguaglia pure quella di due intermedj equidistanti dai primi, ed uguaglia anche il doppio del termine di mezzo. Per esempio, se la progressione ha sette termini, la somma del primo, ed ultimo dà $2p \pm 6d$, e s' ottiene lo stesso valore sommando il secondo, e sesto termine, il terzo, ed il quinto, e duplicando il quarto termine, che è appunto quello di mezzo.

3.° Qualunque sia il numero de' termini constituenti la progressione, l'ultimo termine è sempre uguale al primo più, o meno l' esponente moltiplicato pel numero de' termini meno uno, vale a dire che, se la progressione ha cinque termini, l'ultimo si esprime per $p \pm 4d$, se la progressione ha sei termini, l' ultimo s' esprime per $p \pm 5d$, e così di altri; e però chiamando $= n$ il numero de' termini, e l'ultimo termine $= u$, s'avrà $u = p \pm \overline{n-1} \times d$.

265. Giacchè la ſomma del primo, ed ultimo termine uguaglia quella di due termini equidiſtanti da queſti, ed anche il doppio del termine di mezzo (§. 264 n. 1, e 2), conſegue, che, ſe la ſomma del primo, ed ultimo termine ſi moltiplica per la metà del numero de' termini, nel prodotto ſi ha la ſomma di tutti i termini della progreſſione.

Se la ſomma ſuddetta ſia $= s$, ſarà $s = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, 1.ª Formola, e ſe in vece di u ſi ſcriverà il ſuo valore $p + \overline{n-1} \times d$, ſarà $s = \overline{2p + n - 1} \times d \times \frac{n}{2} = np + \frac{n^2 - n}{2} \times d$, 2.da Formola.

Si riſolvono i Problemi appartenenti alle Progreſſioni Aritmetiche.

266. Le formole date (§. 264, 265) ſervono per riſolvere i problemi, di cui ſi tratta. Eſſe contengono cinque quantità, cioè il primo termine, l' eſponente, l' ultimo termine, il numero de' termini, e la ſomma di tutti i termini. E però, venendo dall' eſpoſto del problema cognite tre di queſte quantità, baſterà ſoſtituirle nelle formole per venire in cognizione delle

altre, come ſi vedrà ne' ſeguenti eſempj.

267. Per ſette giorni conſecutivi ſono diſertati parecchi Soldati dalla Fortezza nemica. Nel primo giorno ne ſono diſertati 8, e ne' giorni ſucceſſivi il numero de' diſertori è andato creſcendo ugualmente in ciaſcun giorno, di maniera che la diſerzione nel ſettimo giorno è ſtata di 26 uomini. Cercaſi quanti Soldati ſono diſertati in ciaſchedun giorno.

Dall' eſpoſto del problema ſi comprende facilmente, che le diſerzioni cotidiane formano una progreſſione aritmetica creſcente, in cui, eſſendo dato il primo termine $= 8$, l' ultimo termine $= 26$, il numero de' termini $= 7$, ſi cerca il denominatore. E però, ſe queſti dati ſi ſoſtituiranno nella formola $u = p \pm \overline{n-1} \times d$ (§. 264), e ſi prenderà poſitiva la quantità $\overline{n-1} \times d$, ſtantechè la progreſſione è creſcente, s'avrà $26 = 8 + 6d$, e quindi $d = 3$, col qual mezzo ſi formerà la progreſſione ſeguente, i cui termini dimoſtrano la diſerzione cotidiana.

$\div$ 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26.

Se col mezzo dei diviſati dati ſi cercaſſe anche la ſomma della progreſſione, baſterebbe ſoſtituirli nella prima formola del §. 165, e s' avrebbe

$s = \overline{8 + 26} \times \frac{7}{2} = 119.$

268. Un Negoziante ha pigliato a impreſtito da un Uſurajo una certa ſomma, e ſi è obbligato di pagare ll. 5 in fine del primo meſe, ll. 7 in fine del 2.do, e così creſcendo colla ſteſſa legge ne' meſi ſucceſſivi. Nell' ultimo meſe il negoziante ha pagato ll. 23 d' intereſſe. Cercaſi quanti meſi abbia tardato a reſtituire la ſomma preſa ad impreſtito, e quanto abbia pagato d' intereſſe.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che della progreſſione aritmerica creſcente ſi cerca il numero de' termini, e la ſomma, eſſendo noti l' eſponente, il primo, e l'ultimo termine.

Nella formola $u = p \pm \overline{n-1} \times d$ ſoſtituituiſcanſi i dati del problema, e ſi prenda poſitivo il termine $\overline{n-1} \times d$, ſtantechè la progreſſione è creſcente, s' avrà

$23 = 5 + \overline{n-1} \times 2$, e quindi $n = 10$.

Soſtituiſcaſi il valore di n nella formola $s = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, e s' avrà

$s = \overline{5+23} \times 5 = 140.$

269. Un Ortolano, avendo preſo un orto in affitto per ſei anni, ne ha ricavato di frutto nel primo anno ll. 70, nel

ſecondo ha ricavato ll. 8 di meno, nel terzo anno ha pure ricavato ll. 8 di meno del ſecondo di maniera, che il frutto di ciaſchedun anno è ſempre ſcemato di ll. 8. Cercaſi quanto abbia conſeguito nell'ultimo anno, e quale ſia il denaro ricavato in tutto il tempo dell'affittamento.

Dall'eſpoſto del problema ſi vede, che della progreſſione decreſcente ſi cerca l'ultimo termine, e la ſomma, eſſendo dati l'eſponente, il primo termine, ed il numero de' termini.

Soſtituiſcanſi i dati nella formola $u = p - \overline{n-1} \times d$, prendendo negativo il termine $\overline{n-1} \times d$, a cagione che la progreſſione è decreſcente, e s'avrà

$u = 70 - 5 \times 8 = 30$.

Soſtituiſcaſi queſto valore di u nella formola $s = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$, s'avrà

$s = \overline{70+30} \times 3 = 300$.

270. Un Comandante di fanteria vuol penetrare colla baionetta in canna nella linea dell'Avverſario. A tal fine vuol diſporre i ſuoi ſoldati in forma di un cuneo ſpuntato formato con dieci righe di fanti, la prima delle quali ſia di 24 uomini, la ſeconda di 30, la terza di 36, e così

ſuſſeguentemente coll'accreſcere ſempre ſei ſoldati nella riga ſucceſſiva. Cercaſi il numero de' ſoldati neceſſarj per eſeguire queſta diſpoſizione.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che ſi cerca la ſomma della progreſſione creſcente, eſſendo dati il primo termine, l'eſponente, ed il numero de' termini.

Siccome in queſto caſo è ignoto l'ultimo termine, così ſi farà uſo della ſeconda formola (§. 265) $s = np \pm \frac{n^2 - n}{2} \times d$, prendendo poſitivo il termine $\frac{n^2 - n}{2} \times d$, ſtantechè la progreſſione è creſcente, e s' avrà

$$s = 10 \times 24 + \frac{100 - 10}{2} \times 6 = 510.$$

271. L' acqua di un fonte ſi ſcarica da otto canali. Il ſecondo canale ſomminiſtra in un' ora brente $2\frac{1}{2}$ di meno del primo, il terzo ne ſomminiſtra $2\frac{1}{2}$ di meno del ſecondo, e così progredendo colla ſteſſa diminuzione ſi ſa, che l'ottavo somminiſtra ſoltanto 6 brente. Cercaſi quante brente d'acqua ſgorgano in un' ora dagli otto canali.

Siccome per l' esposto del problema s'incontrano nelle formole (§. 265) due incognite, cioè p, ed s, così fa di mestiere valersi prima della formola (§. 264 n. 3) $u = p \pm \overline{n-1} \times d$, affine di trovare il valore di p, pigliando a tal fine negativo il termine $\overline{n-1} \times d$, stantechè la progressione è decrescente.

Sostituendo adunque i numeri in questa formola, si ha $6 = p - 7 \times 2\frac{1}{2}$, e quindi

$p = 23\frac{1}{2}$.

Il ritrovato valore di p sostituiscasi nella formola $s = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$, s' avrà

$s = \overline{23\frac{1}{2} + 6} \times 4 = 118$.

272. Allorchè si lascia rotolare una palla A lungo un piano inclinato BC, la medesima si muove con legge tale, che nel secondo minuto scorre piedi 4 di più, che nel primo, nel terzo minuto scorre piedi 4 di più del secondo, e così crescendo il suo movimento di piedi 4 in ciaschedun minuto, arriva nell' ultimo a scorrere piedi 46. Cercasi quanti minuti impiegherà la palla nel rotolare da B in C per l' estensione di piedi 288.

FIGURA XVI.

Confrontando l' eſpoſto del problema colle due formole $u = p \pm \overline{n-1} \times d$, $s = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, ſi vede, che le incognite p, ed n, eſſendo in ambedue le formole, ſi debbono conſiderare come due equazioni primitive, che convien ridurre in una finale col fare ſcomparire una delle incognite.

Soſtituiſcanſi pertanto i dati nelle due formole, e s'avrà

1.ª $46 = p \pm \overline{n-1} \times 4$

2.da $288 = \overline{p + 46} \times \frac{n}{2}$. Nella prima formola ſi faccia ſcomparire p, prendendo poſitivo il termine $\overline{n-1} \times 4$, ſtantechè la progreſſione è creſcente, e s'avrà $46 - \overline{n-1} \times 4 = p$; ſoſtituiſcaſi queſto valore di p nella ſeconda formola, e ſarà

$$288 = \overline{46 - \overline{n-1} \times 4 + 46} \times \frac{n}{2} = 48n - 2n^2,$$

equazione affetta di ſecondo grado, che trattata colle ſolite regole dà $n = 12$, e quindi $p = 2$.

Coſtruire la Tavola, mediante la quale ſi determina il numero delle palle diſpoſte in pila.

273. Le palle da cannone, le bombe, e le granate Reali ſogliono negli Arſenali eſſere diſpoſte in pile. Alcune di queſte hanno un triangolo equilatere per baſe, altre un quadrato, altre un quadrilungo, altre un pentagono, o un eſagono regolare ec.

Le formole per determinare il numero delle palle contenute in ciaſcheduna di queſte pile ſi coſtruiſcono per mezzo della dottrina detta *dei numeri figurati, poligoni, e piramidali.* Queſta dottrina è fondata ſulla natura, e proprietà delle progreſſioni aritmetiche; ma perchè il trattare queſta teoria in tutte le ſue diramazioni ci allontanerebbe dal noſtro oggetto, così ne addurremo tanto che baſta per coſtruire una tavola, mediante la quale ſi determina il numero delle palle contenute nelle pile quadrate, e nelle lunghe, cioè che hanno la baſe quadrata, o quadrilunga, e ſono quelle, di cui ſi fa un maggior uſo dagli Artiglieri.

274. Allorchè ſi conſidera una pila quadrata, ſi vede

1.° Che

1.° Che ciaſcheduna delle ſue quattro facciate, come *ABC*, *ACD*, preſenta un triangolo equilatere formato da diverſe file orizzontali di palle, e che, principiando dalla cima *A*, le palle contenute in ciaſcheduna fila ſucceſſiva formano la progreſſione aritmetica de' numeri naturali, e che col continuo raccogliere i termini di queſta progreſſione ſi ha il numero delle palle contenute nel triangolo. FIGURA XVII.

Queſti numeri così raccolti chiamanſi *Poligoni*, ed in iſpezie *Numeri triangolari.*

2.do Che ciaſcheduna delle diviſate file orizzontali è il lato di uno ſtrato quadrato di palle, e che queſti ſtrati ſovrappoſti gli uni agli altri formano la pila quadrata, di modo che ſe, cominciando dalla cima *A*, ſi raccoglieranno ſucceſſivamente i quadrati dei numeri naturali, s' avrà la ſomma delle palle contenute nella pila. Queſti numeri così raccolti chiamanſi *Numeri Piramidali.*

275. Per formare la tavola, di cui ſi tratta, ſi ſcrivono in una colonna a mano ſiniſtra i numeri naturali, e queſti ſi raccolgono ſucceſſivamente, e ſe ne ſcrive la ſomma nella colonna de' numeri triangolari corriſpondentemente al numero naturale (§. 274 n. 1). Sommando 1 con 2

ſi ha 3 per lo triangolare, che corriſponde al naturale 2, ſommando il triangolare 3 col naturale 3 ſi ha il triangolare 6 corriſpondente al naturale 3, ſommando il triangolare 6 col naturale 4 ſi ha il triangolare 10 corriſpondente al naturale 4, e così ſuſſeguentemente, come ſi oſſerva nella ſeguente tavola, che ſi può accreſcere a beneplacito.

Nella terza colonna ſi ſcrivono i quadrati corriſpondentemente ai loro numeri naturali, indi ſi raccolgono ſucceſſivamente, incominciando dall' unità (§. 274 n. 2), e così ſommando il quadrato di 1 col quadrato di 2, che è 4, ſi ha 5 pel numero piramidale, o ſia pel numero delle palle contenute in una pila, che ha due palle in un ſuo lato, ſommando 5 col quadrato di 3, che è 9, ſi ha 14 per la quantità delle palle contenute in una pila, che ne ha tre in un ſuo lato, ſommando 14 col quadrato di 4, che è 16, ſi ha 30 pel numero delle palle contenute in una pila, che ne ha quattro in un ſuo lato, e così di ſeguito.

Tavola per le Pile quadrate.

Numeri Naturali.	Triangolari.	Quadrati.	Piramidali.
1	1	1	1
2	3	4	5
3	6	9	14
4	10	16	30
5	15	25	55
6	21	36	91
7	28	49	140
8	36	64	204
9	45	81	285
10	55	100	385
			ec.

Si dee quì notare che, dopo d' aver regiſtrato i numeri piramidali fin al ſegno, che ſi deſidera, più non ſono neceſſarj i numeri quadrati, in vece che i triangolari ſervono ancora per coſtruire la tavola delle pile lunghe.

276. Se ſi eſamina il coſtrutto di una pila lunga *ADGKBCFHL*, ſi vede, che eſſa è compoſta della pila quadrata *ABCD*, e di diverſe facciate triangolari *EF*, *GH*, *KL* appoggiate le une alle altre, e quindi che il numero delle palle eſiſtenti nelle pile lunghe è compoſto da quelle, che FIGURA XVIII.

formano la pila quadrata, e dalle altre, che ſono nelle dette facciate. Per la qual coſa, ſe ai numeri piramidali s' aggiugneranno ſucceſſivamente una, due, tre volte ec. i corriſpondenti triangolari, s'avranno in queſte ſomme le palle contenute nelle pile lunghe.

Nella tavola per le pile quadrate ſi ſcriva a deſtra *Facciate*, e ſotto queſta categoria ſi noti il numero corriſpondente a ciaſcheduna facciata, cioè 1.ª, 2.da, 3.ª, 4.ª, 5.ª, ec. Ciò premeſſo, per avere i numeri da regiſtrarſi nella colonna della prima facciata, ſi ſommi il piramidale 1 col triangolare 1, e s' avrà 2 da regiſtrarſi in queſta 1.ª colonna corriſpondentemente alle dette due unità. Si ſommi il piramidale 5 col triangolare 3, e la ſomma 8 ſi ſcriva nella detta colonna 1.ª in corriſpondenza d' eſſi numeri 5, e 3. Si ſommi il piramidale 14 col triangolare 6, e s' avrà 20 da regiſtrarſi in detta colonna 1.ª in corriſpondenza d' eſſi due numeri 14, e 6, e continuando a operare nella ſteſſa maniera, s' avranno gli altri numeri 40, 70, 112, 168, 240, 330, 440 ec. da regiſtrarſi nella colonna 1.ª

Per avere i numeri da regiſtrarſi nella colonna della 2.da facciata, ſi ſommi il

numero 2 regiſtrato nella 1.ª colonna col triangolare corriſpondente 1, e s' avrà 3, che ſi ſcriverà nella colonna 2.da in corriſpondenza de' numeri 2, 1. Si ſommi 8 della 1.ª colonna col triangolare 3, e la ſomma 11 ſi regiſtri nella colonna 2.da in corriſpondenza d'eſſi due numeri. Si ſommi 20 della prima colonna col triangolare 6, e ſi regiſtri 26 in corriſpondenza d' eſſi due numeri, e proſeguendo a così fare, s' avranno gli altri numeri 50, 85, 133 ec. d' eſſa 2.da colonna.

Operando nella ſteſſa maniera ſi avranno i numeri da regiſtrarſi nella 3.ª, 4.ª, 5.ª ec. colonna, come ſi ricava facilmente dalla ſeguente tavola, che ſi può eſtendere a beneplacito.

Tavola per numerare le palle diſpoſte in Pile quadrate, e lunghe.

Numeri.			Facciate.			
Naturali.	Ttiangolari.	Piramidali.	1.ª	2.da	3.ª	4.ª ec.
1	1	1	2	3	4	5
2	3	5	8	11	14	17
3	6	14	20	26	32	38
4	10	30	40	50	60	70
5	15	55	70	85	100	115
6	21	91	112	133	154	175
7	28	140	168	196	224	252
8	36	204	240	276	312	348
9	45	285	330	375	420	465
10	55	385	440	495	550	605

277. L' uſo di queſta tavola è ſempliciſſimo: imperciocchè, ſe ſi tratta di determinare le palle eſiſtenti in una pila quadrata, baſta contare quelle, che ſono in uno de' ſuoi lati *AB*, o pure *BC*, e ſuppoſto per eſempio che queſto numero ſia 7, ſi oſſerverà, che al numero naturale 7 corriſponde 140 nella colonna dei piramidali; onde ſi dirà, che in quella pila quadrata eſiſtono 140 palle.

Se ſi tratterà di determinare le palle eſiſtenti in una pila lunga, ſi conteranno le palle da *B* in *A*, che ſi troveranno eſſere per eſempio 9, indi ſi conteranno da *D* verſo *K* quelle, che additano il numero delle facciate appoggiate alla pila quadrata, e ſuppoſto che ſieno 4, ſi oſſerverà nella tavola, che al numero naturale 9 corriſponde 465 nella colonna della quarta facciata, onde ſi dirà, che in quella pila lunga eſiſtono 465 palle, e così di altri caſi. FIGURA XVIII.

CAPO II.

Delle Progreſſioni Geometriche.

278. Se in una proporzione continua geometrica s'accreſcerà il numero de'termini, s'avrà una progreſſione geometrica, la quale ſi potrà continuare a beneplacito, come ſi oſſerva negli eſempj ſeguenti, ne' quali ſi vede, che la progreſſione può principiare da qualſivoglia numero intero, o rotto.

∷ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 ec.

∷ 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 ec.

∷ $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{4}$: 1 : 4 : 16 : 64 : 256 ec.

Se in queſte progreſſioni creſcenti ſi invertirà l'ordine de' termini, s'avranno altrettante progreſſioni decreſcenti, che ſi potranno eſtendere a piacimento ſenza mai arrivare al zero, ſe non ſe dopo un numero infinito di termini.

$\dot{\div}\dot{\div} 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ ec.

$\dot{\div}\dot{\div} 729 : 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27}$ ec.

$\dot{\div}\dot{\div} 256 : 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \frac{1}{256} : \frac{1}{1024}$ ec.

279. Se nella proporzione continua geometrica (§. 121) $\dot{\div} p : pd : pd^2 : pd^3$ s'accreſcerà il numero de' termini, s'avrà la ſeguente eſpreſſione generaliſſima per qualſivoglia progreſſione geometrica creſcente, e decreſcente.

$\dot{\div} p : pd : pd^2 : pd^3 : pd^4 : pd^5 : pd^6$ ec.

Coll'eſaminare la formazione di queſta formola canonica, ſi dedurranno facilmente i ſeguenti teoremi.

280. In qualſivoglia progreſſione geometrica

1.° Preſi a beneplacito due termini, il loro prodotto uguaglia quello di due altri termini equidiſtanti dai due primi: per eſempio il prodotto del primo p nel ſeſto pd^5 uguaglia il prodotto del ſecondo pd

nel quinto pd^4, ed uguaglia pure il prodotto del terzo pd^2 nel quarto pd^3, poichè tutti essi prodotti si esprimono per p^2d^5.

2.do Se i termini presi sono di numero dispari, il loro prodotto sarà pure uguale a quello di due altri termini equidistanti dai primi, e sarà pure uguale al quadrato del termine di mezzo. Per esempio, pigliando il primo termine p, ed il settimo pd^6, si ha il prodotto p^2d^6 uguale al prodotto del secondo pd nel sesto pd^5, a quello del terzo pd^2 nel quinto pd^4, ed uguale al quadrato del termine di mezzo pd^3.

3.° Qualunque sia il numero de' termini costituenti la progressione, l'ultimo termine è sempre espresso dal prodotto del primo nel denominatore della progressione elevato a una potestà indicata dal numero de' termini meno uno; e così, se la progressione ha cinque termini, l'ultimo termine s' esprime per pd^4, se la progressione ha sei termini, l' ultimo s' esprime per pd^5, e generalmente, se il numero de'termini sia $= n$, e l'ultimo termine si chiami $= u$, sarà $u = pd^{n-1}$.

281. Giacchè la progressione geometrica è una proporzione continua, consegue, che ciascun termine, fuori dell' ultimo, potrà essere antecedente, e ciascun termi-

ne, fuori del primo, potrà eſſere conſeguente; e però il primo termine ſtarà al ſecondo, come la ſomma degli antecedenti ſtà alla ſomma de' conſeguenti (Euclide libro 5. Prop. 12), e invertendo ſtarà il ſecondo al primo, come la ſomma de' conſeguenti a quella degli antecedenti, e dividendo ſtarà il ſecondo, meno il primo, al primo, come tutti i conſeguenti, meno tutti gli antecedenti, o dicaſi, corretta l'eſpreſſione, come l'ultimo, meno il primo, ſtà alla ſomma de' termini, che precedono l'ultimo, cioè

$$pd - p : p :: u - p : \frac{p \times \overline{u-p}}{pd-p}$$

ſomma de' termini, che precedono l'ultimo; ſe a queſta ſomma s'aggiugne l'ultimo termine, ſi ha la ſomma $= s$ di tutti i termini, che coſtituiſcono la progreſſione, cioè $s = \frac{pu-p^2}{pd-p} + u = \frac{ud-p}{d-1}$ prima formola.

Se in queſta prima formola ſi ſcriverà in vece di u il ſuo valore pd^{n-1} (§. 280 n. 3) s'avrà $s = \frac{pd^n-p}{d-1}$ ſeconda formola.

282. Se nella progreſſione decreſcente ſi ſuppone, che il numero de' termini ſi eſtenda all'infinito, l'ultimo termine riu-

ſcirà in queſto caſo infinitamente picciolo riſpetto agli altri; onde ſenza errore ſenſibile ſi potrà conſiderare uguale al zero, e quindi nella formola 1.ª $s = \frac{ud-p}{d-1}$ ſi può ſcancellare il termine ud, ed allora la formola ſuddetta diventa $s = \frac{-p}{d-1}$, e ſerve appunto per le progreſſioni decreſcenti all' infinito; dovendoſi oſſervare, che la ſomma s rieſce ſempre una quantità poſitiva, giacchè, eſſendo l' eſponente d un rotto minore dell' unità, il numeratore, ed il denominatore del rotto hanno ambidue il ſegno meno, e quindi ſomminiſtrano un quoziente poſitivo; onde la formola ſi può ſcrivere in queſt' altra maniera $s = \frac{p}{1-d}$.

Si riſolvono i problemi appartenenti alle progreſſioni Geometriche.

283. Le formole date (§. 280, 281, 282) ſervono per riſolvere i problemi, di cui ſi tratta. Eſſe contengono pure cinque quantità (§. 266), cioè il primo termine, il denominatore, l' ultimo termine, il numero de' termini, e la ſomma di tutti i termini. Per la qual coſa, eſſendo dall'eſpo-

ſto del problema cognite tre di queſte quantità, baſterà ſoſtituirle nelle formole per venire in cognizione delle altre, come ſi oſſerverà ne' ſeguenti eſempj.

284. Un Profeſſore s' aſſume di educare un giovine per dieci anni continui, e pattuiſce, che nel primo anno ſe gli darà una doppia, due nel ſecondo anno, quattro nel terzo, otto nel quarto ec., col duplicare ſempre nell'anno ſuſſeguente la ſomma dell' anno antecedente. Cercaſi quanto dovrà ricevere nell' ultimo anno, e quale ſia la ſomma, che avrà a conſeguire per li dieci anni.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che della progreſſione geometrica ſi cerca l'ultimo termine, e la ſomma, eſſendo dato il primo termine $= 1$, il denominatore $= 2$, ed il numero de' termini $= 10$.

Per avere l' ultimo termine, ſoſtituiſcanſi i dati nella formola $u = pd^{n-1}$ (§. 280 n. 3), e s' avrà $u = 1 \times 2^{10-1} = 512$. Col ſoſtituire poi queſto valore dell' ultimo termine nella prima formola (§. 281) $s = \frac{ud-p}{d-1}$, ſi avrà $s = \frac{512 \times 2-1}{2-1} = 1023$ pel totale numero delle doppie, che conſeguir dee il Profeſſore.

Se nella formola si fosse addimandato a dirittura la somma totale, si sarebbe fatto uso della seconda formola (§. 281)

$$s = \frac{pd^n - p}{d-1} = \frac{2^{10}-1}{1} = 1023.$$

285. Un Trafficante ha guadagnato in parecchi anni ll. 2548, nel primo anno ha guadagnato ll. 7., ed essendosi negli anni successivi accresciuto il suo guadagno sempre nella stessa proporzione, ha avuto ll. 1701. di profitto nell' ultimo anno. Cercasi il guadagno fatto in ciaschedun anno.

Dall' esposto del problema si vede che, essendo data la somma della progressione geometrica, il primo, e l' ultimo termine, se ne cerca il denominatore. Nella formola $s = \frac{ud-p}{d-1}$ sostituiscansi i dati del problema, e s'avrà $2548 = \frac{1701d-7}{d-1}$, e quindi $2548d - 2548 = 1701d - 7$, e $847d = 2541$, onde $d = \frac{2541}{847} = 3$.

Instituiscasi pertanto la progressione, e s' avrà pel guadagno di cadun anno.

$\therefore$ 7 : 21 : 63 : 189 : 567 : 1701.

286. Se nell' avanti scritto problema in vece della somma fosse dato il numero de' termini, converrebbe servirsi della formola

$u = pd^{n-1}$, in cui, ſoſtituendo i dati, s'otterrebbe una equazione pura del grado indicato da $n - 1$.

Ove poi in vece dell' ultimo termine foſſe data la ſomma, il primo termine, ed il numero de' termini, converrebbe ſervirſi della formola $s = \frac{pd^n - p}{d-1}$, in cui, ſoſtituendo i dati, s' incontra un' equazione del grado indicato dal numero de' termini, ed affetta in modo, che non ſi può riſolvere colle coſe fin quì inſegnate.

287. Si è fatto un riparo nelle ripe di un fiume per ſette anni ſucceſſivi, di modo che nel primo anno eſſendoſi fatta una ſpeſa conſiderabile, nel ſecondo anno ſi è ſpeſo ſolamente le due quinte parti dell' anno antecedente, nel terzo anno ſi è ſpeſo pure le due quinte parti di ciò eraſi ſpeſo nel ſecondo anno, di maniera che, avendo la ſpeſa ſempre diminuito in quella ragione, ſi ſono ſpeſe nel ſettimo anno ſolamente ll. 512. Cercaſi quale ſia la ſpeſa fatta nel primo anno, e quanto ſiaſi ſpeſo in tutto.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che la progreſſione è decreſcente col denominatore $\frac{2}{5}$, e che, avendoſi l' ultimo ter-

mine, ed il numero de' termini, si cerca il primo termine, e la somma.

Si cominci a trovare il primo termine col sostituire i dati nella formola $u=pd^{n-1}$, e s'avrà $512 = p \times \left|\frac{2}{5}\right.^{-6} = \frac{64}{15625}\, p$, e quindi $p = \frac{512 \times 15625}{64} = 125000$.

Sostituiscasi questo valore del primo termine nella formola $s = \frac{ud-p}{d-1}$, s'avrà

$$s = \frac{512 \times \frac{2}{5} - 125000}{\frac{2}{5} - 1} = 207992.$$

288. Un tesoriere ha sborsato ll. 33670. in diversi pagamenti. Nel primo pagamento ha sborsato ll. 10240, nel secondo ha sborsato i tre quarti del primo pagamento, nel terzo sborso ha pagato i tre quarti del secondo sborso, ed avendo continuato a fare altri pagamenti, ne' quali il susseguente era i tre quarti della somma antecedente, cercasi quale sia il numero de' pagamenti fatti, e quale la somma sborsata nell' ultimo di essi.

Essendo dall' esposto del problema data la somma della progressione, il primo termine, ed il denominatore $\frac{3}{4}$, convien pri-

ma d' ogni cosa trovare l' ultimo termine per mezzo della formola $s = \frac{ud-p}{d-1}$, giacchè in questa non compariſce l' incognita $= n$. Soſtituiſcanſi adunque i dati nella formola, e s' avrà $33670 = \frac{\frac{3}{4}u - 10240}{\frac{3}{4} - 1}$, ed operando ſi trova $u = 2430$.

Se queſto valore ſi ſoſtituirà nella formola $u = pd^{n-1}$, s'avrà $2430 = 10240 \times \left|\frac{3}{4}\right|^{n-1}$, ove, eſſendo l' incognita n nell' eſponente, non ſe ne può trovare il valore colle fin quì date regole: del che ſe ne tratterà nel capo ſeguente, dopo che ſi ſarà data la teoria de' Logaritmi.

I Computiſti ſogliono riſolvere queſti problemi col mezzo di una operazione da eſſi detta a *Scaletta*, trovando ſucceſſivamente varj termini colla cognizione del primo termine, e del denominatore, finchè arrivano ad averne tanti, che ſommati inſieme ſomminiſtrano la detta ſomma. Nel caſo noſtro prendendo le tre quarte parti di 10240 ſi ha il ſecondo termine 7680, le tre quarte parti di queſto ſomminiſtrano 5760 pel terzo termine, e così operando

rando s' arriva a formare la seguente progressione di sei termini, la somma de' quali uguaglia le lire 33670.

10240
7680
5760
4320
3240
2430
33670

289. Zenone Filosofo antico propose il seguente argomento soffistico, per cui pretendeva, che posta una Tartaruga in distanza di una lega da Achille, e supposto, che Achille camminasse dieci volte più presto della Tartaruga, messi l' uno, e l' altra in movimento nel medesimo tempo, non potrebbe Achille raggiugnere giammai la Tartaruga, poichè diceva egli, mentre Achille fa la prima lega, la Tartaruga ne fa un decimo della seconda, e, mentre Achille fa un decimo della seconda, la Tartaruga fa un decimo di questo decimo, e così in infinito senza mai raggiugnere la Tartaruga.

Siccome tutti questi decimi formano la seguente progressione decrescente all' infinito $\div\div$ $1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000}$ ec., così per conoscere la falsità dell' argomen-

to baſta trovarne la ſomma, e queſta ſarà il cammino, che dee fare Achille per raggiugnere la Tartaruga. Soſtituendo pertanto nella formola $s = \frac{p}{1-d}$ (§. 282) i dati del problema, ſarà $s = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$, vale a dire che Achille raggiugnerà la Tartaruga, dopo che avrà ſcorſa la prima lega, ed una nona parte della ſeconda lega.

290. Si fa uſo delle progreſſioni geometriche decreſcenti all' infinito per riſolvere anche varj altri problemi. Per eſempio ſi ſa, che una palla cacciata da un pezzo d'Artiglieria contro un gran terrapieno vi s'inoltra fino a un certo ſegno ſolamente; avvegnachè la continua reſiſtenza, che la medeſima incontra nel terrapieno, ſminuiſce in ciaſcheduno inſtante il ſuo inoltramento. Ciò premeſſo, ſe ſi ſuppone, che la palla penetri piedi 4 nel primo inſtante, e che in ciaſcheduno degli inſtanti ſucceſſivi il ſuo inoltramento ſia ſolamente $\frac{3}{5}$ dell' antecedente, e ſi voglia conoſcere quanto la palla penetri nel terrapieno, baſta nella formola (§. 282) $s = \frac{p}{1-d}$ ſoſtituire i dati del problema,

cioè $p = 4$, $d = \frac{3}{5}$, e s' avrà $s = \frac{4}{1-\frac{3}{5}}$ $= \frac{20}{2} = 10$ piedi per la totale immersione.

Dell' uso più esteso delle Progressioni Geometriche.

291. Allorchè si esamina più minutamente l' espressione canonica delle progressioni geometriche

$\therefore p : pd : pd^2 : pd^3 : pd^4 : pd^5 : pd^6 : pd^7 : pd^8 : pd^9 : pd^{10}$ ec.

se ne deducono facilmente varj altri teoremi, e per esempio

1.° Presi due termini qualsivoglia di una progressione, se si divide il più composto pel più semplice, il quoziente, che ne risulta, è sempre il denominatore della progressione elevato alla potestà indicata dal numero, che esprime di quanti termini il dividendo sia distante dal divisore. Se si divide pd^4 per pd, il quoziente sarà $= d^3$, il cui esponente 3 è uguale al numero de' termini, per cui pd^4 è distante da pd; se si divide pd^{10} per pd^6, il quoziente sarà $= d^4$, il cui esponente 4 è uguale al numero de' termini, per cui pd^{10} è distante da pd^6.

2.do Se in una progreſſione ſe ne ſommano i termini due a due, cioè il primo col ſecondo, il terzo col quarto, il quinto col ſeſto ec., queſte ſomme formano una progreſſione compoſta

$:: p + pd : pd^2 + pd^3 : pd^4 + pd^5 : pd^6 + pd^7$ ec.

Per provarlo, baſta oſſervare, che il prodotto del primo termine $p + pd$ nel terzo $pd^4 + pd^5$ è uguale al quadrato del ſecondo termine $pd^2 + pd^3$, che il prodotto del ſecondo termine $pd^2 + pd^3$ nel quarto $pd^6 + pd^7$ è uguale al quadrato del terzo termine $pd^4 + pd^5$, e così di altri.

In oltre, ſe in queſta nuova progreſſione compoſta ſi divide il ſecondo termine pel primo, o pure il terzo pel ſecondo; il quoziente $= d^2$ è il quadrato del denominatore della progreſſione ſemplice.

3.° Si otterrà pure una progreſſione compoſta, ſe in vece di ſommare il primo termine col ſecondo, il terzo col quarto ec. ſi principierà a ſommare il ſecondo col terzo, il quarto col quinto, il ſeſto col ſettimo ec., e di queſta progreſſione il denominatore ſarà pure $= d^2$, cioè il quadrato del denominatore della progreſſione ſemplice.

4.° Medeſimamente ſe di una progreſſione ſi ſommeranno i termini tre a tre

ſucceſſivamente, principiando da quello, che più piace, ſi otterrà pure un' altra progreſſione compoſta, il cui denominatore ſarà $= d^3$, cioè il cubo del denominatore della progreſſione ſemplice. Così ancora, ſe i termini di una progreſſione ſi ſommeranno quattro a quattro, s' avrà un'altra progreſſione compoſta, il cui denominatore $= d^4$. ſarà la quarta poteſtà del denominatore della progreſſione ſemplice. Se i termini della progreſſione ſemplice ſi ſommeranno cinque a cinque, s'avrà pure un'altra progreſſione compoſta, il cui denominatore ſarà $= d^5$, e così ſucceſſivamente: potendoſi dimoſtrare tutti queſti teoremi nel modo iſteſſo, che ſi è uſato quì ſopra al n. 2.

Applichiamo queſta dottrina alla ſoluzione d'alcuni problemi.

292. Data la ſomma dei due primi termini $= 20$ di una proporzione geometrica, e data la ſomma del ſettimo, ed ottavo termine $= 14580$, trovare il ſeſto termine.

Per mezzo delle coſe già inſegnate intorno le progreſſioni ſi ſcorge facilmente, che per avere il ſeſto termine convien prima trovare il denominatore della progreſſione, ed il primo termine. Riflettendo

poi al modo di fare queſta ſcoperta, ſi vede, che il problema è uno di quelli, in cui non ſi può già cercare immediatamente ciò, che ſi deſidera, ma fa di meſtieri trovare prima un' altra quantità conducente alla ſoluzione del queſito, ed è neceſſario in oltre dividere il problema in due (§. 215 n. 4).

Affine di conoſcere, come debba eſſere diviſo il problema propoſto, convien riflettere, che tra il ſecondo, ed il ſettimo termine della progreſſione propoſta ſe ne incontrano altri quattro, i quali, eſſendo pure ſommati due a due, ſomminiſtrano la progreſſione compoſta.

$\div\div p + pd : pd^2 + pd^3 : pd^4 + pd^5 : pd^6 + pd^7$ (§. 290 n. 2).

Ciò poſto ſi ſcorge, che il problema propoſto ſi dee dividere ne' due ſeguenti.

1.° Conoſcendo il modo, con cui una progreſſione compoſta è formata, ed eſſendo di queſta dato il primo termine = 20, ed il quarto = 14580, trovare il denominatore, ed il primo termine della progreſſione ſemplice.

2.do Cognito il primo termine, ed il denominatore di una progreſſione ſemplice, trovare il ſeſto termine.

Per risolvere il primo problema basta riflettere, che dividendo il quarto termine 14580 pel primo 20, il quoziente 729 è il cubo del denominatore di questa progressione composta (§. 291 n. 1), e quindi la sua radice = 9 somministra esso denominatore; ma perchè questa progressione composta è nata dalla somma dei termini della semplice presi due a due, così il denominatore 9 dee essere il quadrato del denominatore della progressione semplice (§. 291 n. 2), e quindi sarà = 3 il denominatore ricercato.

Per avere il primo termine della progressione semplice, instituiscasi l' equazione $p + pd = 20$, nella quale scrivendo in vece di d il suo valore = 3, si ha $p+3p=20$, e $p = \frac{20}{4} = 5$.

Per risolvere poi il secondo problema, basta nella formola $u = pd^{n-1}$ sostituire il dato $n = 6$, ed i ritrovati $p = 5$, $d = 3$, e s' avrà $u = 5 \times 3^{6-1} = 243 \times 5 = 1215$ valore del sesto termine.

293. Di una progressione geometrica di dodici termini si conosce la somma del secondo, terzo, e quarto termine = 1240, e quella dell'ottavo, nono, e decimo termine = 19375000, si cerca la somma di tutti i termini.

Eſſendo queſto problema della medeſima natura dell' antecedente, baſterà per riſolverlo fare delle rifleſſioni analoghe, conſiderando fralle altre coſe, che tra il quarto e l' ottavo termine della progreſſione ſemplice ve ne ſono tre; onde la compoſta è formata dai termini della ſemplice preſi tre a tre. Ciò premeſſo ſi dividerà il problema ne' due ſeguenti.

1.° Conoſcendo il modo, con cui una progreſſione compoſta è formata, ed eſſendo di queſta noto il primo termine = 1240, ed il terzo = 19375000, trovare il denominatore, ed il primo termine della progreſſione ſemplice.

2.do Cognito il primo termine, il denominatore di una progreſſione ſemplice, ed il numero de' termini = 12, trovare la ſomma di tutti i termini.

Per riſolvere il primo problema convien riflettere che, dividendo il terzo termine 19375000 pel primo 1240, il quoziente 15625 è il quadrato del denominatore compoſto (§. 291 n. 1), e quindi la ſua radice = 125 ſomminiſtra eſſo denominatore: ma perchè queſta progreſſione compoſta è nata dalla ſomma dei termini della ſemplice preſi tre a tre, così il denominatore compoſto 125 ſarà il cubo

del denominatore ſemplice $= 5$ (§. 291 n. 4).

Per avere poi il primo termine della progreſſione ſemplice, baſterà inſtituire l'equazione col ſecondo, terzo, e quarto termine, cioè $pd + pd^2 + pd^3 = 1240$, e ſcrivendo in queſta il valore di $d = 5$, ſarà $5p + 25p + 125p = 1240$, e quindi $p = \frac{1240}{155} = 8$.

Si riſolverà poi il ſecondo problema col ſoſtituire nella formola $s = \frac{pd^n - p}{d-1}$ il dato $n = 12$, ed i ritrovati $p = 8$, $d = 5$.

294. Di una progreſſione geometrica di 15 termini è data la ſomma del terzo, quarto, decimoterzo, e decimoquarto termine $= 73800$, ed è pure data la differenza tra la ſomma del terzo, e quarto, e quella del decimoterzo, e decimoquarto $= 73656$, trovare l'ultimo termine, e la ſomma di tutti i termini.

Queſto problema ha tre parti, e quindi ſi dee ſuddividere nei tre ſeguenti problemi, eſſendo i due ultimi della natura medeſima di quelli già riſolti ne' due precedenti paragrafi.

1.° Data la ſomma $= 73800$ di due numeri, e data la loro differenza $= 73656$, trovare eſſi due numeri.

2.do Conoſcendo il modo, con cui una progreſſione compoſta è formata, ed eſſendo in queſta noto il primo termine, ed il ſeſto, trovare il denominatore, ed il primo termine della progreſſione ſemplice.

3.o Cognito il primo termine, il denominatore, ed il numero de' termini di una progreſſione, trovare l'ultimo termine, e la ſomma di tutti i termini.

Per riſolvere il primo di queſti problemi ſi farà uſo del Corollario (§. 163), cioè la metà della ſomma, più la metà della differenza ſomminiſtra il numero maggiore = 73728, e la metà della ſomma meno la metà della differenza dà il numero minore = 72.

Con queſti dati ſi paſſerà a riſolvere il ſecondo problema, conſiderando, che tra il quarto termine della progreſſione ſemplice, ed il decimoterzo ſe ne incontrano otto, e che, eſſendo preſi due a due, s' ottiene una progreſſione compoſta, che ha ſei termini; per la qual coſa, dividendo il ſeſto termine 73728 di queſta progreſſione pel primo 72, il quoziente 1024 ſarà la quinta poteſtà del denominatore compoſto (§. 291 n. 1), e quindi la ſua radice quinta = 4 ſarà il denominatore

compoſto ; ma perchè la progreſſione compoſta è formata dalla ſomma dei termini della ſemplice preſi due a due, così eſſo denominatore compoſto 4 ſarà il quadrato del denominatore ſemplice (§. 291 n. 2), e queſto ſarà $= 2$.

Per avere ora il primo termine della progreſſione ſemplice, s' inſtituiſca l'equazione col terzo, e quarto termine, cioè $pd^2 + pd^3 = 72$, e ſcrivendo il valore di $d = 2$, ſarà $4p + 8p = 72$, e quindi $p = 6$.

Per ultimo col ſoſtituire nelle formole $u = pd^{n-1}$, $s = \frac{ud-p}{d-1}$ il dato $n = 15$, ed i valori ritrovati $p = 6$, $d = 2$, ſi riſolverà il terzo problema, e s' avrà il valore dell' ultimo termine, e la ſomma di tutti i termini.

295. Dalla dottrina addotta in queſt' articolo ſi ricavano alcune altre rifleſſioni molto intereſſanti, e per eſempio

1.° Se le ſoluzioni addotte ne' tre precedenti paragrafi ſi confrontano con quella del §. 286, qualora ſi cerca il denominatore per mezzo della formola $s = \frac{pd^n-p}{d-1}$, ſi vede, che con queſta formola l' equazione rieſce di un grado indicato dal nu-

mero de' termini, e affetta in modo, che non ſi può riſolvere colle coſe inſegnate, in vece che nelle ſoluzioni del preſente articolo l'equazione rieſce ſempre pura, e più depreſſa.

2.da Giacchè in ciaſcun grado evvi un problema generaliſſimo, cui tutti gli altri particolari del medeſimo grado ſi riducono, e che nei problemi di grado ſuperiore al ſecondo eſſo problema generaliſſimo ſi riduce a trovare fra due date grandezze due, tre, o quattro ec. proporzionali di mezzo (§. 177), e che queſti ſi riſolvono col mezzo di una equazione pura, così ſi ſcorge che, ſe l' Analiſta procurerà con qualche ripiego di ridurre il propoſto problema particolare al ſuo generaliſſimo, arriverà a riſolverlo con maggior facilità, e ſemplicità.

3.a Se i ripieghi dati in diverſi luoghi della ſeconda Parte, e ſpecialmente nel capo 5. ſi combineranno colla preſente dottrina, s' otterranno in molti riſcontri delle equazioni più ſemplici, e più depreſſe.

4.a Finalmente ſi avviſa che, qualora nelle Scienze Fiſico-Meccaniche ſi fanno delle ſperienze per determinare la legge di un qualche movimento difforme, ſi ar-

riva col mezzo della preſente dottrina a riſolvere il problema con facilità.

Coſtruire le formole per li problemi del Merito, e dello Sconto.

296. I problemi, di cui ſi tratta, potendoſi ridurre a formole generali, cominceremo a coſtruire quella per li problemi del merito, deducendo queſta coſtruzione dalla ſoluzione del problema.

Un Uſuraio ha dato ad impreſtito un capitale $= c$ per quattro anni con patto però, che ſpirato il tempo ſuddetto ſe li bonifichi l'intereſſe annuo nella ragione di cento al tanto per cento $= d$, e ha pattuito in oltre, che l'intereſſe dovutogli in fine di ciaſcun anno faccia capitale per l'anno ſeguente, onde venga ad eſigere intereſſe d'intereſſe. Spirato il tempo ſuddetto ſi trova, che il capitale impreſtato da principio è accreſciuto della ſomma $= a$; coſtruire la formola generale.

Il capitale $= c$ impreſtato dee nel fine del primo anno eſſere accreſciuto nella ragione convenuta $= d$, onde eſſo capitale in fine del primo anno, e principio del ſecondo ſarà $c + cd$. Queſto credito dell'Uſuraio dee nel fine del ſecondo anno,

e principio del terzo eſſere pure accreſciuto nella ragione ſuddetta; onde ſarà $c + cd + cd + cd^2 = c + 2cd + cd^2$. Nel fine del terzo anno, e principio del quarto verrà pure accreſciuto come prima, onde ſarà $c + 2cd + cd^2 + cd + 2cd^2 + cd^3 = c + 3cd + 3cd^2 + cd^3$. Nel fine del quarto anno ſarà pure eſſo credito accreſciuto nella detta ragione; onde ſarà $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 + cd + 3cd^2 + 3cd^3 + cd^4 = c + 4cd + 6cd^2 + 4cd^3 + cd^4$. E però a mente del problema dovrà eſſo credito eſſere uguale al primo capitale accreſciuto dell' aumento pattuito $= a$; perciò s'avrà l'equazione $c + 4cd + 6cd^2 + 4cd^3 + cd^4 = c + a$, in cui ſi contengono tutte le condizioni del problema.

Volendo ora ridurre queſt' equazione a formola generale, convien oſſervare, che i crediti dell' Uſuraio in fine di ciaſchedun anno ſono come ſegue

In fine del primo anno $c + cd = c\overline{X 1 + d}$

In fine del ſecondo anno $c + 2cd + cd^2 = c\overline{X 1 + d}^2$

In fine del terzo anno $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 = c\overline{X 1 + d}^3$

In fine del quarto anno $c + 4cd + 6cd^2 + 4cd^3 + cd^4 = c\overline{X 1 + d}^4$,

vale a dire che queſti crediti ſono eſpreſſi

pel primo capitale moltiplicato per $1+d$ elevato alla potestà indicata dal numero degli anni: per la qual cosa, se il numero degli anni si esprimerà per n, avremo $c \times \overline{1+d}^{n} = c+a$, formola generalissima per questa specie di problemi, in cui si vede che, qualora si cerca il capitale $= c$, o l'accrescimento $= a$, il problema è sempre del primo grado. Se poi si cerca la ragione $= d$ dell'interesse annuo, il problema riesce del grado indicato dal numero $= n$ degli anni; e se si cerca il numero degli anni, converrà fare un computo a scaletta (§. 288), o pure servirsi dei logaritmi, come si vedrà nel capo seguente.

297. Per far vedere l'uso della formola come sovra ritrovata,
sia $c = 1000000$ lire

$d = \frac{1}{20}$, vale a dire che per ogni cento lire se ne debba pagare cinque d'interesse, e sia $a = 215506\frac{1}{4}$ lire,
ed $n = 4$.

Se nella formola si sostituiranno i valori di c, d, n, sarà $1+d = \frac{21}{20}$, e quindi $1000000 \times \left|\overline{\frac{21}{20}}^{4} = 1000000 + a$, o sia,

elevando il rotto $\frac{21}{20}$ alla quarta potestà,

$1000000 \times \frac{194481}{160000} = 1215506\frac{1}{4} = 1000000$

$+ a$, e quindi $1215506\frac{1}{4} - 1000000$

$= 215506\frac{1}{4} = a$.

Se nella formola si sostituirà il valore di a, d, n, s' avrà il valore di c, e se si sostituiranno i valori di c, a, n, si troverà, che l' equazione è di quarto grado, cioè $\overline{1+d}^4 = \frac{1000000+215506\frac{1}{4}}{1000000} = \frac{4862025}{4000000}$ ed estratta la radice quadrata da ciascun membro, sarà $\overline{1+d}^2 = \frac{2205}{2000} = \frac{441}{400}$, ed estratta di nuovo la radice quadrata, sarà $1+d = \frac{21}{20}$, e quindi $d = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

298. Per costruire la formola per li problemi dello Sconto si opererà come segue

Un Cavaliere, volendo viaggiare, prende ad impreſtito per tre anni una somma $= c$ con obbligo di pagarne l' interesse annuo alla ragione di cento al tanto per cento $= d$. Egli vuole assegnare al suo creditore una rendita annua $= r$, per cui si paghino i detti interessi, e scontando

col

col di più una parte del capitale, trovi esso Cavaliere estinto il suo debito nel ripatriarsi dopo i tre anni.

Essendo il capitale preso ad impreſtito $= c$, il debito del Cavaliere in fine del primo anno sarà $c + cd$, e dopo d'aver scontato colla rendita assegnata, sarà $c + cd - r$ il suo debito in principio del secondo anno.

Nel fine del secondo anno il debito del Cavaliere sarà $c + cd - r + cd + cd^2 - dr = c + 2cd + cd^2 - r - dr$, e dopo d'avere scontato il debito colla rendita assegnata, rimarrà in principio del terzo anno $c + 2cd + cd^2 - r - dr - r = c + 2cd + cd^2 - 2r - dr$.

Nel fine del terzo anno il debito sarà $c + 2cd + cd^2 - 2r - dr + cd + 2cd^2 + cd^3 - 2dr - d^2r = c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 - 2r - 3dr - d^2r$, e scontando colla rendita assegnata, succederà, che in fine di questo tempo verrà esattamente estinto il debito, onde si avrà $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 - 2r - 3dr - d^2r = o$, e però $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 = 3r + 3dr + d^2r$ sarà l'equazione, che contiene tutte le condizioni del problema.

Per convertire quest' equazione in una formola generale, converrà esprimerla in

queſt' altra maniera $c \times \overline{1+3d+3d^2+d^3}$, o ſia $c \times \overline{1+d}^3 = r \times \overline{3+3d+d^2}$, ma il ſecondo membro è uguale a queſt' altra eſpreſſione $r \times \frac{\overline{1+d}^3 - r}{d}$, come facilmente ſi può dimoſtrare, facendone il confronto, così ſi ſcorge come in ambedue i membri dell' equazione vi ſia la poteſtà di $1+d$ indicata dal numero degli anni; e ſiccome ſi trova ſempre la ſteſſa coſa per qualſivoglia numero d'anni, così chiamando queſto numero $= n$, avremo la formola generaliſſima per li problemi di queſta ſpecie $c \times \overline{1+d}^n = r \times \frac{\overline{1+d}^n - r}{d}$.

Una breve rifleſſione fatta ſu queſta formola baſta per conoſcere che, qualora ſi cerca il capitale, o la rendita, il problema è ſempre del primo grado, che, qualora ſi cerca la ragione $= d$ del cento al tanto per cento, il problema rieſce di un grado indicato dal numero degli anni; e ſe ſi cerca il numero degli anni, converrà fare un conto a ſcaletta, o valerſi dei Logaritmi.

299. Per applicare i numeri alla formola, ſia $c = 331000$, $d = \frac{1}{10}$, $r = 133100$, e ſia $n = 3$, ſe in quella ſi ſoſtituirà il

capitale, la ragione, ed il numero degli anni, ſarà

$$331000 \times \frac{11}{10}^{3} = r \times \frac{\frac{11}{10}^{3} - r}{\frac{1}{10}}, \text{ o ſia}$$

$$331000 \times \frac{1331}{1000} = 440561 = r \times \frac{\frac{1331}{1000} - r}{\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{3310r}{1000},$$

e quindi $\frac{440561000}{3310} = 133100 = r$.

Se ſarà noto c, r, ed n, s' avrà

$$331000 \times \overline{1+3d+3d^2+d^3}$$
$$= \frac{133100 \times \overline{1+3d+3d^2+d^3} - 133100}{d},$$

e facendo ſcomparire il rotto, ſarà

$$331000 \times \overline{d+3d^2+3d^3+d^4}$$
$$= 133100 \times \overline{1+3d+3d^2+d^3} - 133100,$$

equazione di quarto grado con tutti i ſuoi termini, che non ſi può riſolvere colle coſe fin quì ſpiegate.

CAPO III.

De' Logaritmi.

300. Chiamansi *Logaritmi* gli esponenti di una progressione geometrica qualsivoglia. Se la progressione sarà crescente, come $\div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5$ ec., gli esponenti $0, 1, 2, 3, 4, 5$ saranno i logaritmi positivi della proposta progressione, cioè sarà zero il logaritmo di a^0, sarà 1 il logaritmo di a^1, 2 il logaritmo del terzo termine della progressione, e così successivamente.

Se la progressione sarà decrescente, come $\div\div a^0 : a^{-1} : a^{-2} : a^{-3}$ ec., gli esponenti $0, -1, -2, -3$ ec. saranno i logaritmi negativi d'essa progressione, la quale corrisponde precisamente a quest'altra espressione $\div\div a^0 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3}$ ec. (§. 22, 23).

301. Dalle date definizioni consegue, che la teoria spiegata nella prima parte pel calcolo degli esponenti delle potestà serve precisamente per quello de' logaritmi, vale a dire che pel mezzo di questi si può moltiplicare, dividere, innalzare numeri a potestà, ed estrarne la radice.

Per addurne alcuni esempj, abbiasi la seguente progressióne geometrica ascendente a destra dell' unità, e discendente a siniſtra, e sopra ciascuno de' suoi termini sia scritto il corrispondente esponente della potestà

— 7 . — 6 . — 5 . — 4 . — 3 . — 2 . — 1 . ″

$\frac{1}{128} : \frac{1}{64} : \frac{1}{32} : \frac{1}{16} : \frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1$

″ . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 ec.

1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 ec.

Si osservi ora, che sommando il logaritmo 2 col logaritmo 6 si ha il logaritmo 8, che nella progressione geometrica crescente corrisponde a 256 prodotto di 4 per 64. Se il logaritmo 5 si sottra dal logaritmo 9, nell' avanzo 4 si ha il logaritmo di 16 quoziente, che s'ottiene nel dividere 512 per 32. Se si triplica il logaritmo — 2, si ha il logaritmo — 6, che corrisponde al rotto $\frac{1}{64}$, che è il cubo di $\frac{1}{4}$. Se del logaritmo — 6 si prende la metà, si ha il logaritmo — 3, che corrisponde al rotto $\frac{1}{8}$, che è la radice quadrata di $\frac{1}{64}$, e così di altri.

302. Quantunque negli addotti eſempj i logaritmi della progreſſione geometrica formino la ſerie de' numeri naturali, nulla di meno ſi può in vece di queſta ſcrivere una qualſivoglia altra progreſſione aritmetica, come oſſervaſi nelle colonne verticali *B*, *C*, *D*, *F*, ognuna delle quali ſomminiſtra i logaritmi dei termini corriſpondenti alla ſteſſa progreſſione geometrica regiſtrata nella colonna verticale *A*. Dovendoſi però avvertire, che, dopo d'aver ſcelta una progreſſione aritmetica per la ſede de' logaritmi, non è poi più lecito di variarla.

A		B	C	D	F
1	*	3	10	47	2 3/5
2	1	8	14	54	3 2/5
4	2	13	18	61	4 1/5
8	3	18	22	68	5
16	4	23	26	75	4/5
32	5	28	30	82	3/5
64	6	33	34	89	2/5

303. Sebbene ſia arbitrario di prendere qualſivoglia progreſſione aritmetica per li logaritmi di una progreſſione geometrica, ciò non oſtante, conſiderando i Matematici la facilità, che per mezzo di quelli s' ottiene in molte operazioni aritmetiche (§. 301), hanno ſtabilito di comun conſenſo ſervirſi della ſerie de' numeri naturali, che principia dal zero, ed in corriſpondenza d' eſſa ſerie hanno pure fiſſata la ſeguente progreſſione geometrica.

:: 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 ec. di modo che, essendo zero il logaritmo di 1, si ha poi 1 pel logaritmo di 10, 2 pel logaritmo di 100, 3 pel logaritmo di 1000, 4 pel logaritmo di 10000 ec.

Costruire la Tavola de' Logaritmi.

304. Alle tavole de' seni stampate in diversi libri va unita per l'ordinario quella de' Logaritmi corrispondenti ai numeri naturali, principiando dall'unità fino a 10000.

Per costruire questa tavola convien osservare, che i logaritmi 0, 1, 2, 3, 4 registrati nell'antecedente paragrafo servono solamente per gli numeri naturali della progressione geometrica 1, 10, 100, 1000, 10000; onde fa di mestiere trovare i logaritmi dei numeri intermedj fra 1, e 10, fra 10, e 100, fra 100, e 1000, fra 1000, e 10000. A tal fine si prendano questi numeri in modo, che sieno medj proporzionali nella detta progressione geometrica, ed a questi medj si scrivano corrispondentemente i loro logaritmi, i quali per necessità riusciranno altrettanti medj proporzionali aritmetici; ma siccome in queste operazioni si hanno degli avanzi, che non si possono trascurare senza

errore notabile, così converrà renderli insensibili colla loro picciolezza, facendo a tal fine le operazioni suddette coll' aggiugnere sette zero tanto a' termini della progressione geometrica, quanto a quelli della progressione aritmetica, ciò premesso

Per trovare il logaritmo di 2, che è il primo numero frapposto tra 1, e 10 della progressione geometrica, si trovi un proporzionale di mezzo tra 1.0000000, e 10.0000000, e sarà 3.1622777, il cui logaritmo sarà ✗.5000000, che è la metà della somma del logaritmo di 1, e di 10. Ora, siccome il 2 numero naturale, che si vuole inserire nella progressione geometrica, è fra 1, e 3.1622777, così cerchisi fra questi due numeri un medio proporzionale, e s' avrà il numero naturale geometrico 1.7782794, il cui logaritmo sarà ✗.2500000, cioè la metà della somma del logaritmo di 1, e di 3.1622777; ma perchè il numero 2 geometrico, che ricercasi, è tra 1.7782794, e 3.1622777, così si trovi fra questi due numeri un proporzionale di mezzo geometrico, e sarà 2.3713737, il cui logaritmo ✗.3750000 è la metà della somma dei due logaritmi ✗.2500000, ✗.5000000 corrispondenti ai numeri geometrici 1.7782794,

e 3.1622777. Col procedere ſucceſſivamente nell' iſteſſo modo a trovare altri medj proporzionali geometrici, ed i ſuoi corriſpondenti logaritmi, s' arriverà dopo ventiquattro operazioni ad avere il ricercato numero 2.0000004. col ſuo corriſpondente logaritmo *.3010301, in cui, non facendo conto dell' ultima cifra 4, ſi ha il numero 2 da interporſi nella progreſſione geometrica tra 1, e 10, il cui logaritmo è *.3010301.

Collo ſteſſo artifizio ſi troveranno gli altri numeri primi, che ſono tra 1, e 10, tra 10, e 100, tra 100, e 1000, tra 1000, e 10000.

305. Quanto poi ai numeri compoſti, baſta ſommare i logaritmi dei numeri componenti; e così per avere il logaritmo del numero naturale geometrico 4, baſterà duplicare il logaritmo di 2, e s'avrà *.6020602 pel logaritmo di 4, col duplicare il logaritmo di 4, s' avrà il logaritmo di 16, col duplicare queſto logaritmo, s'avrà quello di 256 ec.

Se ſi ſommerà il logaritmo di 2 con quello di 3, s' avrà il logaritmo di 6, col ſommare il logaritmo di 6 con quello di 2, s'avrà il logaritmo di 12, e s' avrà queſt' iſteſſo logaritmo col ſom-

mare il logaritmo di 3 con quello di 4.

Se ſi duplicherà il logaritmo di 3, s'avrà quello di 9, e ſe ſi triplicherà il logaritmo di 3, s'avrà quello di 27, e così di altri.

Si noti, che i logaritmi ſono numeri relativi, in vece che ſono aſſoluti i numeri naturali geometrici corriſpondenti ai detti logaritmi.

La cifra ſcritta a ſiniſtra di un logaritmo, e ſeparata con un punto dalle rimanenti ſi chiama *Caratteriſtica.*

306. Ciò, che detto è per trovare i logaritmi de'numeri aſſoluti, ſi dee applicare preciſamente per trovare il logaritmo di qualſivoglia ſeno dato, o della corriſpondente tangente dell'arco ec. Un breve eſame fatto intorno le tavole de'ſeni, delle tangenti, ſeganti, e de'loro corriſpondenti logaritmi baſta per comprenderne la dottrina mediante le coſe ſpiegate.

Dell' uſo della tavola de' logaritmi.

307. Trovare il logaritmo di un numero naturale regiſtrato nella tavola.

Nella colonna de'numeri aſſoluti ſi cerchi il numero propoſto, il logaritmo, che eſiſte dirimpetto a deſtra, ſarà il ricercato.

Per esempio se si cerca il logaritmo di 64, si trova 1.807806.

Se il numero proposto, cui si cerca il logaritmo, sarà maggiore di 10000, e quindi non sarà compreso nelle tavole ordinarie, converrà dividerlo per un numero tale, che il divisore, ed il quoziente si trovino registrati nelle tavole, e sommando indi i logaritmi del divisore, e del quoziente, s'avrà il logaritmo del proposto numero.

Se poi il numero proposto sarà una frazione, basterà dal logaritmo corrispondente al numeratore sottrarre il logaritmo corrispondente al denominatore, e nell'avanzo s'avrà il logaritmo della frazione, il quale sarà negativo, se la frazione sarà minore dell'unità, e sarà positivo, se la frazione sarà maggiore dell'unità.

308. Essendo proposto un logaritmo minore del massimo registrato nella tavola, si troverà il corrispondente numero assoluto col cercare esso logaritmo nella tavola, ed osservare quale sia il numero assoluto, che le corrisponde a sinistra.

Occorrendo poi, che il proposto logaritmo non sia nella tavola, ma si trovi compreso fra due di quelli, che vi sono registrati, sarà segno certo, che il nume-

ro assoluto corrispondente a questo logaritmo conterrà un qualche rotto. Per trovare questo numero si prenda nella tavola il numero assoluto corrispondente al logaritmo prossimo minore, indi dal logaritmo prossimo maggiore si sottri il prossimo minore, ed il residuo si faccia denominatore di una frazione, che abbia per numeratore la differenza tra il logaritmo proposto, ed il prossimo minore; onde il numero assoluto ricercato sarà quello, che corrisponde al logaritmo prossimo minore, e che ha in oltre il divisato rotto. Per esempio se sia proposto il logaritmo 3.7589982, di cui si cerca il corrispondente numero assoluto, si osserva nella tavola, che il numero naturale corrispondente al logaritmo prossimo minore è 5741, la differenza de' due logaritmi prossimi è 757, quella tra il prossimo minore, ed il proposto è 107, adunque il numero assoluto ricercato sarà $5741\frac{107}{757}$.

309. Dalle cose già dette (§. 301) risulta, che per avere col mezzo de' logaritmi il prodotto di due numeri assoluti, basta sommarne insieme i logaritmi, e la somma di questi corrisponderà al numero

aſſoluto, che uguaglia il prodotto ricercato; che col ſottrarre un logaritmo da un altro s' avrà nell' avanzo il logaritmo di quel numero aſſoluto uguale al quoziente, che naſce dal dividere i due numeri corriſpondenti ai due logaritmi; che moltiplicando un logaritmo per 2, per 3, per 5 ec. s' avrà il quadrato, il cubo, la quinta poteſtà del numero, cui corriſponde il logaritmo primiero, e contrariamente, ſe un logaritmo propoſto ſi dividerà per 2, per 3, per 5 ec., s' avrà nel quoziente il logaritmo, che corriſponde alla radice quadrata, cubica, quinta ec. del numero aſſoluto, cui il logaritmo primiero s' appartiene.

310. Detto abbiamo (§. 288) che, qualora in una equazione l' incognita ſi trova nell' eſponente, d' uopo è valerſi dei logaritmi per iſchivare i conti a ſcaletta, e riſolvere il problema in una maniera ſcientifica. In queſti caſi ſi fanno paſſare tutte le cognite in un membro dell' equazione, e ſi laſcia nell' altro la ſola cognita elevata alla poteſtà incognita; dopo del che in vece dei numeri aſſoluti ſi ſcrivono i loro logaritmi, e ſi abbaſſa l' incognita in forma di coefficien-

te, indi si tratta l'equazione nel modo solito, la quale riesce poi sempre del primo grado.

Nella formola $s = p \times \frac{\sqrt[n]{d^n} - p}{d - 1}$ (§. 281) sia dato $s = 105\frac{1}{2}$, $p = 8$, $d = \frac{3}{2}$. Sostituiscansi questi numeri nella formola, s'avrà $105\frac{1}{2} = 8 \times \frac{\sqrt[n]{\frac{3}{2}} - 8}{\frac{3}{2} - 1}$

o sia $\frac{243}{32} = \sqrt[n]{\frac{3}{2}}$, e sostituendo in vece dei numeri assoluti i loro logaritmi, s'avrà 2.3856065 — 1.5051500 = ∗.8804565, ed $\sqrt[n]{\frac{3}{2}} = ∗.4771213n - ∗.3010300n = ∗.1760913n$; e però 8804565 = 1760913n, ed $n = \frac{8804565}{1760913} = 5$ valore dell'incognita.

Nella formola $c \times \sqrt[n]{1+d} = c + a$ (§. 296) sia $c = 1000000$, $d = \frac{1}{20}$, $a = 21506\frac{1}{4}$, col sostituirvi questi numeri, s'avrà $1000000 \times \sqrt[n]{\frac{21}{20}} = 1000000$

$+215506\frac{1}{4}$, e moltiplicando per 4, e liberando il rotto $\left|\frac{21}{20}\right|^{n}$ dal coefficiente, sarà $\left|\frac{21}{20}\right|^{n} = \frac{4862025}{4000000}$; e siccome questi numeri non si trovano nelle tavole de' logaritmi, così si divideranno nei loro componenti; onde sarà $\left|\frac{21}{20}\right|^{n} = \frac{675 \times 7203}{4000 \times 1000}$, e scrivendo i loro logaritmi, sarà

$$\left|\frac{21}{20}\right|^{n} = 1.322193n - 1.3010300n$$
$$= \overline{2}.0211893n,$$
$$\frac{675 \times 7203}{4000 \times 1000} = 2.8293038 + 3.8575134$$
$$- 3.6020600 - 3.0000000 = \overline{1}.847572,$$

avremo pertanto $211893n = 847572$, e quindi $n = \frac{847572}{211893} = 4$.

Nella formola (§. 298) $c \times d \times \overline{1+d}^{n} = r \times \overline{1+d}^{n} - r$ sia $c = 331000$, $d = \frac{1}{10}$, $r = 133100$, col sostituire questi numeri, s' avrà $331000 \times \frac{1}{10} \times \left|\frac{11}{10}\right|^{n} = 133100 \times \frac{11}{10}^{n} - 133100$, e correggendo l' espressione

preſſione, ſarà $\frac{1331}{1000} = \left|\frac{11}{10}\right.^{n}$, e ſoſtituendo i loro logaritmi, ſarà

$\frac{1331}{1000} = 3.1241781 - 3.0000000$

$= .1241781$, $\left|\frac{11}{10}\right.^{n} = 1.0413927n$

$- 1.0000000n = n.0413927n$, e però

$1241781 = 413927n$, ed $n = \frac{1241781}{413927} = 3.$

IL FINE.

608785

INDICE

PARTE PRIMA.

Delle Regole per calcolare le quantità Algebraiche . . . . pag. 1

CAPO I.

Del modo di calcolare le quantità ſemplici, e primieramente del Sommare . 5
Sottrarre le quantità ſemplici . . . 7
Moltiplicare le quantità ſemplici . 8
Dividere le quantità ſemplici . . . 9
Delle Poteſtà delle quantità ſemplici 12
Dell' Eſtrazione delle radici dalle quantità ſemplici 13
Del calcolo delle Poteſtà ſemplici . 17

CAPO II.

Del modo di calcolare le quantità compoſte, e primieramente del modo di Sommarle 24
Della Moltiplicazione delle quantità compoſte 25
Della Diviſione delle quantità compoſte 27
Delle Poteſtà delle quantità compoſte 31

Dell' Eſtrazione delle radici dalle quantità compoſte . . . pag. 37
Del calcolo degli Eſponenti delle quantità compoſte 46

CAPO III.

Dell' Eſtrazione delle radici dai numeri 49
Eſtrarre la radice quadrata da un numero propoſto 51
Eſtrarre la radice cubica da un numero 56
Eſtrarre da un numero la radice di grado ſuperiore al terzo . . . 62
Eſtrarre per approſſimazione le radici dai numeri 67
Del maneggiamento delle Frazioni decimali 74

CAPO IV.

Del calcolo delle quantità irrazionali 82
Della riduzione delle quantità radicali alla più ſemplice eſpreſſione . 83
Ridurre le quantità irrazionali alla ſteſſa denominazione 86
Sommare le quantità radicali . 90
Sottrarre le quantità radicali .. 91
Della Moltiplicazione delle quantità radicali 93

Della Divisione delle quantità radicali pag. 94
Estrarre le radici dalle quantità radicali semplici 98

CAPO V.

Delle Ragioni, e Proporzioni . 100
Delle Proporzioni Aritmetiche . 106
Delle Proporzioni Geometriche . 110
Delle Ragioni Geometriche composte 116

PARTE SECONDA.

Delle maniere di risolvere i Problemi Matematici usando il metodo Analitico 121

CAPO I.

Regole, ed indirizzi generali per risolvere i Problemi Matematici col metodo Analitico 122
Come s' arrivi a comprendere chiaramente lo stato della questione . . 127
Distendere il canone, o sia denominare le quantità cognite, e le incognite, e registrarle 127
Esprimere colle equazioni le condizioni poste nel problema . . . 129

Ridurre tutte le equazioni primitive del problema all' equazione finale pag. 133
Trovare il valore dell' incognita nell' equazione finale 137

CAPO II.

Risolvere i problemi numerici, le cui equazioni finali sono pure . . . 143
Si risolvono problemi del primo grado 147
Si risolvono problemi di grado superiore 161

CAPO III.

Risolvere i problemi numerici di grado superiore al primo, le cui equazioni finali sono affette . . . 167
Esterminare l' incognita nelle equazioni di grado superiore al primo . 170
Trovare il valore dell'incognita nelle equazioni finali affette . . . 182
Si risolvono problemi di grado superiore al primo 199

CAPO IV.

Usare il metodo Analitico nella soluzione de' problemi Geometrici . . 208

Indirizzi per instituire il canone, e le equazioni primitive . pag. 209
Risolvere i problemi Geometrici . 215
Costruire geometricamente i valori dell'incognita ottenuti nella risoluzione dell'equazione finale . . . 233

CAPO V.

Si danno alcuni ripieghi principali per ottenere l'equazione finale di un problema molto depressa . . 256

PARTE TERZA.

Delle Progressioni . . . 278

CAPO I.

Delle Progressioni Aritmetiche . . 278
Si risolvono i problemi appartenenti alle Progressioni Aritmetiche . . 281
Costruire la Tavola, mediante la quale si determina il numero delle palle disposte in pila 288

CAPO II.

Delle Progreſſioni Geometriche pag. 295
Si riſolvono i problemi appartenenti alle Progreſſioni Geometriche . 299
Dell' uſo più eſteſo delle Progreſſioni Geometriche 307
Coſtruire le formole per li problemi del Merito, e dello Sconto . . 317

CAPO III.

De' Logaritmi 324
Coſtruire la tavola de' Logaritmi . 328
Dell' uſo della tavola de' Logaritmi 331

IN TORINO

NELLA STAMPERIA REALE.

MDCCLXXVIII.

Imprimatur. Fr. HYACINTHUS BIGLIA Ord. Præd. S. Th. Mag. & Pro-Vic. gen. S. Officii Taurini.

V. CANONICA LL. AA. P.

V. Se ne permette la ſtampa

DI FERRERE per S. E. il signor Conte CAISSOTTI Gran Cancelliere.

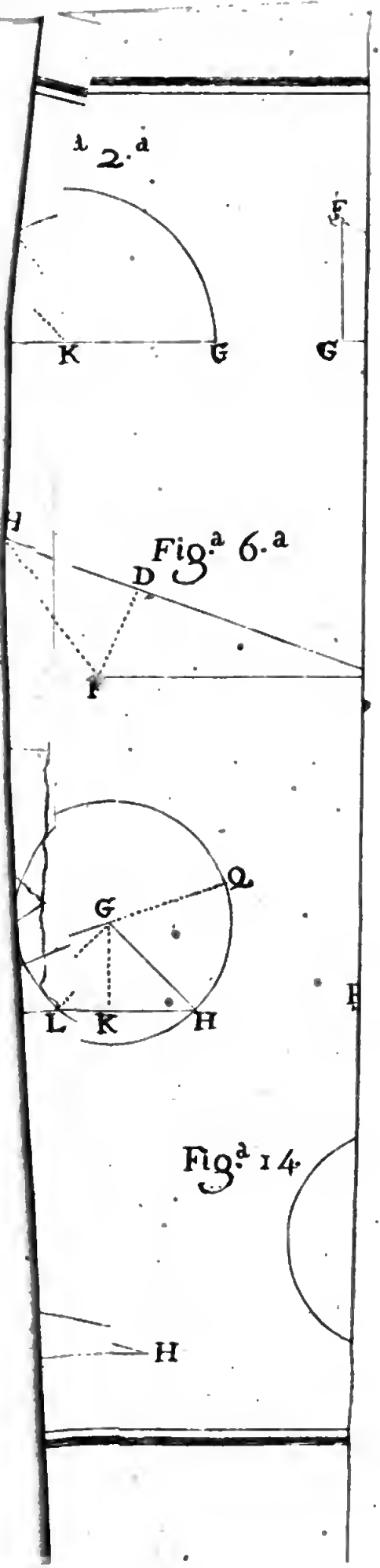

Fig.a 6.a

Fig.a 14

Fig.ª 16
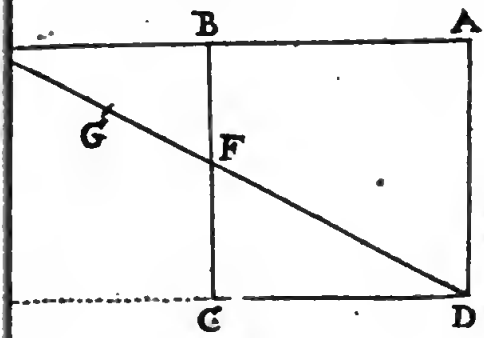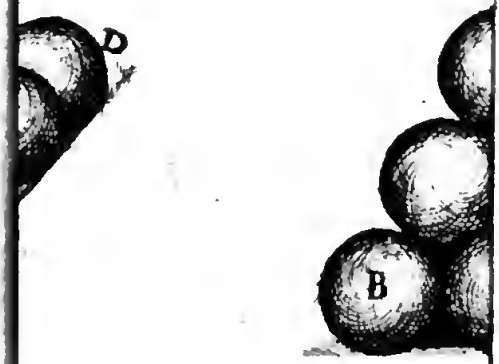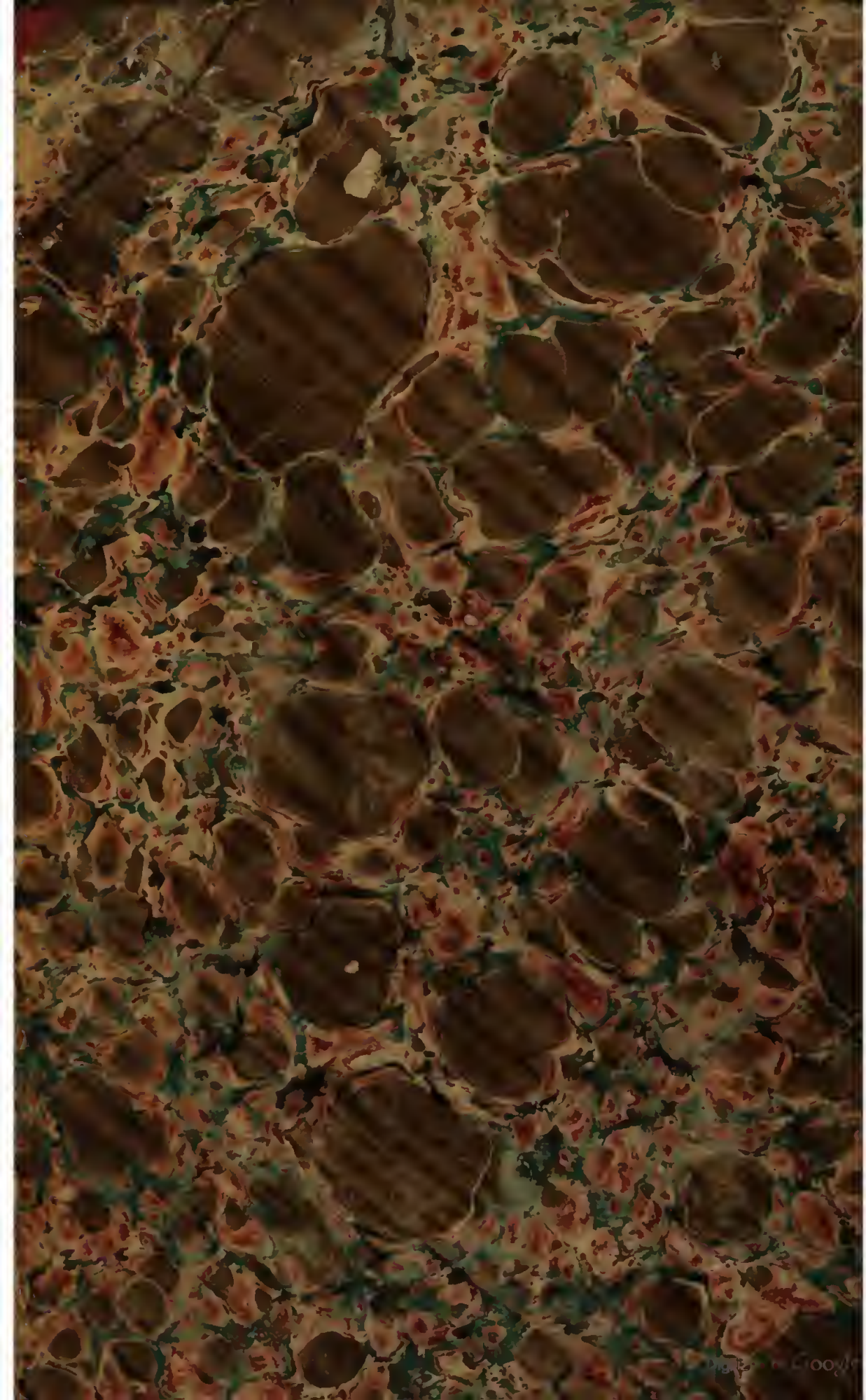
Fig.ª 19.